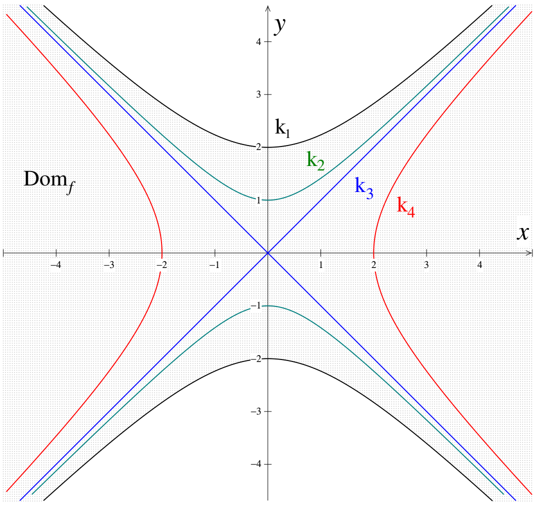
Questão 1. (3,0) Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 4}$. Utilizando o sistema de coordenadas abaixo:

a) determine e represente o domínio máximo da função f;

b) determine equações para as curvas de nível k de f para $k = 0$, $k = \sqrt{3}$, $k = 2$ e $k = \sqrt{8}$. Faça o esboço dessas curvas.



a) $\text{Dom}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 4 \geq 0\}$.

$x^2 - y^2 + 4 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 \geq -4 \;\Rightarrow\; \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq 1 \;\Rightarrow$ o domínio de f é a região do plano compreendida entre as componentes da hipérbole $\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$.

b) $\sqrt{x^2 - y^2 + 4} = k \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 + 4 = k^2 \;\Rightarrow\; \boxed{x^2 - y^2 = k^2 - 4}$.

i) $(k_1 = 0) \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = (0)^2 - 4 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1}$ (hipérbole - que é o bordo do domínio de f).

ii) $(k_2 = \sqrt{3}) \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = (\sqrt{3})^2 - 4 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{y^2 - x^2 = 1}$. (hipérbole)

iii) $(k_3 = 2) \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = (2)^2 - 4 \;\Rightarrow\; \boxed{x^2 - y^2 = 0} \;\Rightarrow\; (x+y)(x-y) = 0$. (par de retas concorrentes $y = -x$ e $y = x$)

iv) $(k_4 = \sqrt{8}) \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = (\sqrt{8})^2 - 4 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1}$. (hipérbole)