MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral II

2ª Lista de Exercícios - 2015

1. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções:
   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

2. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

   Sugestão: Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

3. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

4. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2ª ordem.

   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

5. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

   (b) f é contínua em (0,0)?

   (c) f é diferenciável em (0,0)?

6. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) É f diferenciável em $(0,0)$?

   (d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

7. Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$. Mostre que f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

8. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável, sendo:
   (a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b) $f(x,y) = x|y|$
   (c) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^4+y^4}}$ (d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

9. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:
   (a) $z = e^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$ (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$
   (c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$ (d) $z = e^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$

10. Mostre que os gráficos das funções $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e $g(x,y) = \frac{1}{10}(x^2+y^2) + \frac{5}{2}$ se intersectam no ponto $(3,4,5)$ e têm o mesmo plano tangente nesse ponto.

11. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe mesmo só um?

12. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

13. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

15. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por: $\nabla f(x,y) = (x^2y, y^2), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

16. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

    (a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu.$

    (b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2};\ x = t\cos u,\ y = t \operatorname{sen} u.$

17. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

    Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

18. Seja $v(r,s)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $u(x,t) = v(x+ct, x-ct)$, onde c é constante.

    (a) Verifique que

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = w(x+ct, x-ct),$$

    onde $w(r,s) = -4c^2 v_{rs}(r,s)$.

    (b) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ então existem funções F e G de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).[*]$$

[***Observação:** O item (b) deste exercício foge do contexto desta lista, mas foi introduzido para completar o enunciado do resultado. Entretanto você pode resolver o item (b) com o conhecimento de cálculo que você tem! Reveja também o Exercício 4(a).]

19. Seja $u = u(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Verifique que
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$
sendo Δu, por definição, dado por $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

20. Seja $f = f(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s,t) = f(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\,\mathrm{sen}\,t)$, mostre que
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t)\right]^2 = \mathrm{e}^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\right)^2\right]$$
e que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t) = \mathrm{e}^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t)\right].$$

21. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v).$$
Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,4,f(1,4))$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

22. Seja $F(r,s) = G(\mathrm{e}^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

23. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

24. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

25. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Fixado um certo $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto P:

(a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$; (b)$\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$; (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

26. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0,2,f(0,2)\big)$. Seja
$$g(u,v) = u\,f\big(\mathrm{sen}\,(u^2 - v^3), 2u^2 v\big).$$
Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1,1,g(1,1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4,2,a)$.

27. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2,t,2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2,1)$.

28. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ em um ponto $P = \gamma(t_0)$ com $t_0 > 0$. Considere a curva de nível de f que contém P. Encontre a equação da reta tangente a essa curva no ponto P.

29. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\gamma(t) = (t, 2t^2, t^2), t \in \mathbb{R}$. Seja r a reta tangente à curva de nível 4 de f no ponto $(2,8)$. Sabendo que a reta r contém o ponto $(1,-4)$ e que a imagem de γ está contida no gráfico de f, determine o vetor gradiente de f no ponto $(2,8)$ e a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 8, f(2,8))$.

30. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja π o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e seja $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{t}, t), t \neq 0$ uma parametrização para a curva de nível 1 de f. Suponha que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ para algum t_0. Determine uma equação para o plano π sabendo que ele contém os pontos $(1, 1, \frac{1}{2})$ e $(4, 1, 2)$.

31. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção (e sentido) em que ela ocorre.

    (a) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-y} + 3y$, $(1,0)$; (b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1,2)$;

32. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os pontos $A(1,3)$, $B(3,4)$, $C(2,4)$ e $D(6,15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$ é $3\sqrt{5}$ e que a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\frac{\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||}$ é $\sqrt{8}$. Encontre o vetor gradiente $\nabla f(1,3)$ e a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\frac{\overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||}$.

33. Determine todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais a direção de maior variação da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é a do vetor $(1,1)$.

34. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

35. Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de ambas curvas $\gamma(t) = \left(-\dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}\right)$ e $\sigma(u) = \left(u+1, u, u+2+\dfrac{1}{u}\right)$, $u \neq 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

36. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. É f diferenciável em $(0,0)$?

37. Seja $f(x,y) = \ln(x+y)$. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Mostre que para todo (x,y) com $x + y > 1$,

$$|\ln(x+y) - (x+y-1)| < \frac{1}{2}(x+y-1)^2.$$

38. Sejam $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta do ponto $(1,1)$. Mostre que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $|x-1| < 1$ e $|y-1| < 1$,

$$|f(x,y) - P_1(x,y)| \leq 5(x-1)^2 + 6(y-1)^2.$$

    Usando $P_1(x,y)$, calcule um valor aproximado para $f(1,001,\ 0,99)$ e estime o erro cometido com essa aproximação.

MAIS ALGUNS EXEMPLOS

39. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

    (b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

40. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

    (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

41. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

    (b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t,-t)$.

    (c) Seja $\vec{u} = (m,n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2+n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

    (d) É f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

42. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    Mostre que existem as derivadas direcionais de f em todas as direções no ponto $(0,0)$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle$ para todo vetor unitário $\vec{u}$. É f diferenciável em $(0,0)$?

RESPOSTAS

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

2. -2 5. (b) Não é contínua em (0,0). (c) Não é diferenciável em (0,0).

6. (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. (c) Não. (d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$.

8. (a) f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$. (b) f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$. (c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. (d) O mesmo que o item (c).

9. (a) $z = 1; X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.
(b) $2x + y - z - 1 = 0; X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.
(c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.
(d) $e^3 y - z - e^3 = 0; X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

11. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um) 12. $6x - y - z + 6 = 0$ 13. $k = 8$

17. $a = 3$ 21. 21

22. $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s \cos s \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4 \cos^2 s \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs} \frac{\partial G}{\partial x} + 6r \cos s \frac{\partial G}{\partial y}$; 0.

23. $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$.

24. $4(x-1) + 5(y-2) = 0$ e $4(x+1) + 5(y+2) = 0$. 25. (c) 26. $a = -4$

27. $\nabla f(2,1) = (1,4)$ 28. $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

29. $\nabla f(2,8) = (12,-1)$; $12x - y - z = 12$ 30. $x + y - 2z = 1$

31. (a) $\sqrt{5},\ (1,2)$; (b) $\frac{2}{\sqrt{5}},\ \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

32 . $\nabla f(1,3) = (11,-7)$ e a derivada direcional pedida é $-\frac{29}{13}$.

33. Em todos os pontos da reta $x - y + 1 = 0$. 34. $\frac{4}{5}$ 35. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

36. f não é diferenciável em $(0,0)$.

38. $P_1(x,y) = 5 + (x-1) + 7(y-1) = x + 7y - 3$; 4,931; 10^{-3}.

39. As derivadas parciais não são contínuas em $(0,0)$.

41. (d) f não é diferenciável em $(0,0)$.

42. f não é diferenciável em $(0,0)$.