MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral II

1ª lista de exercícios - 2015

CURVAS E SUPERFÍCIES

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso:

(a) $\gamma(t) = (1, t), t \in \mathbb{R}$

(b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$

(c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t), t \in \mathbb{R}$

(d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t), t \in [-\pi, \pi]$

(e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t), t \in [-2, 0]$

(f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)\ ,\ t \ge 0$

(g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t), t \in \mathbb{R}$

(i) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos^2 t + 2), t \in \mathbb{R}$

(j) $\gamma(t) = (2 + e^{-t}, 3 - e^t), t \ge 0$

2. Esboce C e encontre uma parametrização para C, nos casos:

(a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4,\ y \ge -x \text{ e } y \ge x\}$

(b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1,\ x < 0 \text{ e } y > -10\}$

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{4} = 1 \text{ e } y < 0\}$

(d) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ d((x, y), r) = d((x, y), P)\}$, sendo $P = (0, 3)$ e r, a reta $y = 4$.

(e) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ d((x, y), P) + d((x, y), Q) = 10\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

(f) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |d((x, y), P) - d((x, y), Q)| = 1,\ x > 0\}$, sendo $P = (2, 0)$ e $Q = (-2, 0)$.

3. Para cada curva (descrita por equações paramétricas) dos itens de (a) a (f), indique qual das figuras de I a VI representa a sua imagem. Justifique sua escolha.

(a) $x = t^3 - 2t,\quad y = t^2 - t$

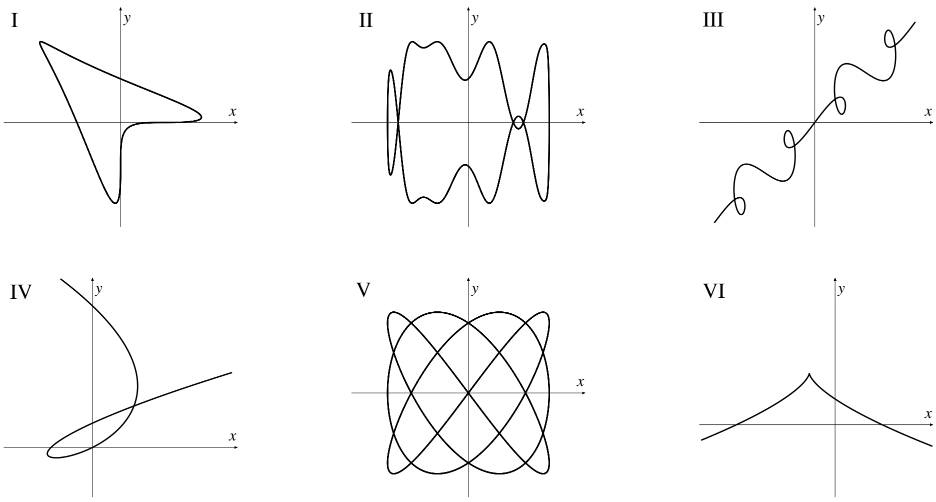
(b) $x = t^3 - 1,\quad y = 2 - t^2$

(c) $x = \operatorname{sen}(3t),\quad y = \operatorname{sen}(4t)$

(d) $x = t + \operatorname{sen}(2t),\quad y = t + \operatorname{sen}(3t)$

(e) $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t),\quad y = \cos(t + \cos t)$

(f) $x = \cos t,\quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen}(5t))$



4. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\ ,\ \operatorname{sen} t \cos t),\ t \in \mathbb{R}$, tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações. Faça um esboço da curva.

5. Considere $f(x) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2$.

   a) Mostre que a função f não é derivável em $x = 0$.

   b) Determine uma curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

   c) Interprete geometricamente o fato de que f não é derivável em $x = 0$, mas a curva γ é derivável em t_0, onde $\gamma(t_0) = (0, 0)$.

6. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

7. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na Figura 1, mostre que as equações paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$

8. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de ciclóide; veja Figura 2.)

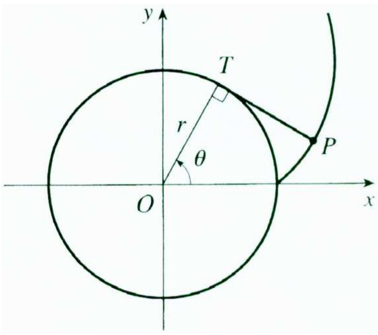


Figura 1

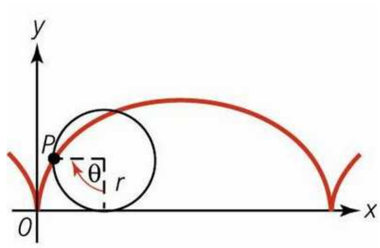


Figura 2

9. Para cada função dada, determine o domínio e faça um esboço:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ (b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

   (d) $f(x,y) = \operatorname{tg}(x-y)$ (e) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^x}$ (f) $f(x,y) = \ln(xy^2 - x^3)$

   (g) $f(x,y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$

10. Esboce uma família de curvas de nível das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-y^2}$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2-y^2}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$

11. Encontre uma parametrização para a curva de nível k de f nos casos:

(a) $f(x,y) = x + 2y - 3, \ \ k = -2;$ (b) $f(x,y) = x - \sqrt{1-2y^2}, \ \ k = 5;$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2}, \ \ k = 1;$ (d) $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}, \ \ k = 1, 2, 3.$

Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6, 0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

12. Esboce os gráficos de:

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2}$

(d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x,y) = y^2 + 1$

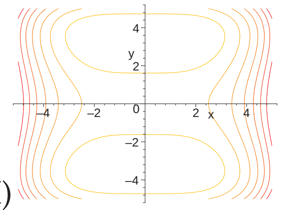
(g) $f(x,y) = y^2 + x$ (h) $f(x,y) = xy$ (i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

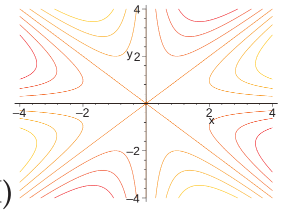
(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ (k) $f(x,y) = (x-y)^2$ (l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$

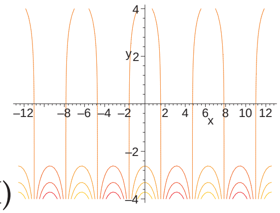
(m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$ (n) $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$ (o) $f(x,y) = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2}$

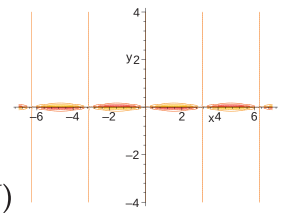
(p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ (q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$ (r) $f(x,y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$

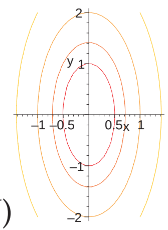
13. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.

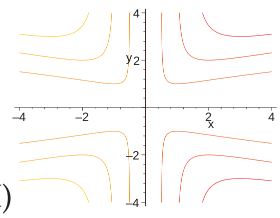

(I)

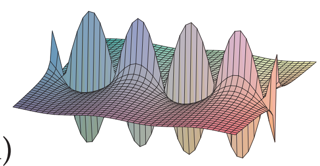

(II)

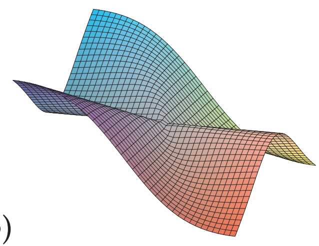

(III)

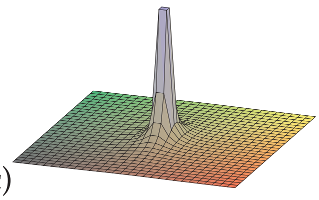

(IV)

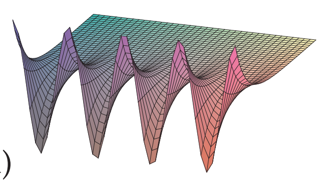

(V)

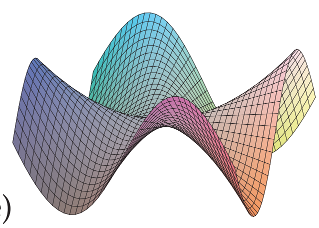

(VI)

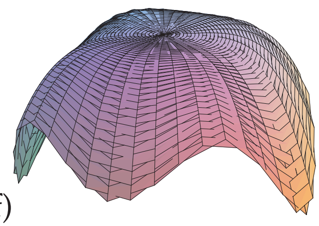

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

14. Seja $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t + 1, \mathrm{e}^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Desenhe a imagem de γ, indicando o sentido de percurso.

    (b) A imagem de γ está contida numa curva de nível da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

15. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

    (a) $x + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
    (d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$
    (g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

    Alguma dessas superfícies é gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

16. Verifique que imagem da curva γ está contida na superfície S e faça um esboço dessa imagem.

    (a) $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, \pi[$ e S é uma esfera com centro em $(0,0,0)$;

    (b) $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{sen}\, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

    (c) $\gamma(t) = (t\,\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{t^2+4})$, $t \geq 0$ e S é o gráfico de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$.

17. Sejam $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $f(x,y) = ((x-2)^2(y-3))^{\frac{2}{3}} + 1$.

    Esboce a imagem de γ. Mostre que essa imagem está contida em uma curva de nível de f e indique qual é o nível.

18. Sejam $g(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$ e $\Gamma(t) = (2 - t, 3 + t, z(t)), t \in \mathbb{R}$.

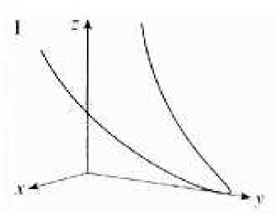
    Sabendo que a imagem (trajetória) de Γ está contida no gráfico de g, encontre $z(t)$.
    Esboce a imagem de Γ.

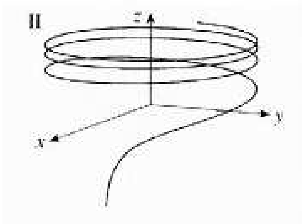
19. Desenhe a imagem de cada uma das seguintes curvas:

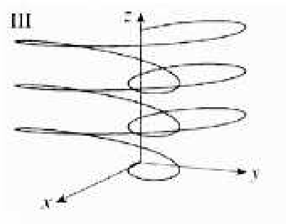
    (a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, 2)$
    (c) $\gamma(t) = (\mathrm{e}^{-t}\cos t, \mathrm{e}^{-t}\mathrm{sen}\, t, \mathrm{e}^{-t}),\ t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \mathrm{sen}\, t),\ t \geq 0$
    (e)$\gamma(t) = (\mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \mathrm{sen}\, t, 1 + \mathrm{sen}\, t, \cos t)$

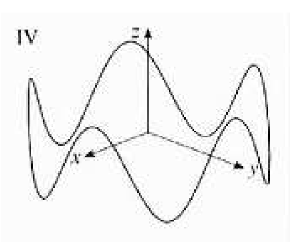
20. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

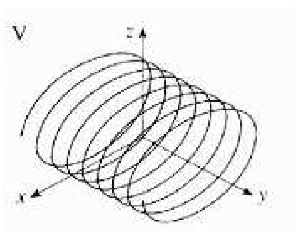
    (a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \mathrm{sen}\, 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$
    (c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\mathrm{sen}\, 3t\ \cos t, \mathrm{sen}\, 3t\ \mathrm{sen}\, t, t)$
    (e)$\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, 5t)$

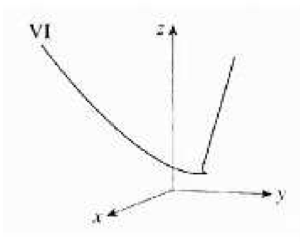












21. Em cada caso, encontre uma parametrização para a curva C e para a reta tangente a C no ponto P:

   (a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } z = x+1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

   (b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

   (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y^2 - x^2 \text{ e } x^2+y^2 = 1\}$ e $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

   (d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-2z^2 = 1 \text{ e } y = 2z+1\}$ e $P = (-\sqrt{2}, -1, -1)$.

   (e) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ e } x^2+y^2 = z\}$ e $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   (f) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{4x^2+y^2} \text{ e } z = 2x+1\}$ e $P = (0,1,1)$.

22. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$.

   (a) Esboce as curvas de nível de f dos níveis $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.

   (b) Encontre uma curva derivável γ, definida num intervalo I, cuja imagem seja a curva de nível de f do nível $c = 1$.

   (c) Determine o vetor tangente à curva γ, que você encontrou no item anterior, no ponto $(-1,0)$.

   (d) Seja $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, encontre o vetor tangente a Γ em $\Gamma(\frac{\pi}{3})$.

LIMITES E CONTINUIDADE

23. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{2x^4+x^2y+y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$

   (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

   (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

   (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$

   (m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$

   (n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$

24. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

25. Determine os pontos de continuidade da seguinte função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1); \\ 1, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

26. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+y^2}\operatorname{sen}\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ L, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Existe algum número real L para o qual f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

27. Seja $f(x,y) = \dfrac{3(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2-y^2}$.

(a) Num mesmo sistema de coordenadas, esboce as curvas de nível de f nos níveis $k=1$ e $k=3$.

(b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? **Justifique.**

RESPOSTAS

2. (a) $\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t), t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ (b) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{t}), t \in]-\infty, -\frac{1}{10}[$
(c) $\gamma(t) = (1+2\operatorname{tg} t, 3\sec t), t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ (d) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(7-t^2)), t \in \mathbb{R}$
(e) $\gamma(t) = (5\cos t, \sqrt{21}\operatorname{sen} t), t \in [0, 2\pi[$ (f) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}\sec t, \frac{\sqrt{15}}{2}\operatorname{tg} t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

4. $y = x$ e $y = -x$.

5. (b) $\gamma(t) = (t^3, t^2)\ t \in \mathbb{R}$

9. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$ (b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$
(c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$ (d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
(e) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ (f) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$
(g) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2+y^2 < 16\}$

11. (a) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2}(1-t)), t \in \mathbb{R}$ e $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \lambda(2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$
(b) $\gamma(t) = (5 + \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\, t), t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $X = (6,0) + \lambda(0,1), \lambda \in \mathbb{R}$
(c) $\gamma(t) = (\sec t, \text{tg}\, t), t \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ e $X = (\sqrt{2}, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 2), \lambda \in \mathbb{R}$
Para $k = 2$ temos, $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cup \gamma_2(t)$, onde $\gamma_1(t) = (t, 1), t \in \mathbb{R}$ e $\gamma_2(t) = (t, -1), t \in \mathbb{R}$
Para $k = 3$ temos, $\gamma(t) = (\sqrt{3}\text{tg}\, t, \sqrt{3}\sec t), t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

14. (b) Sim, no nível 5.

15. Apenas a superfície do item (a).

17. no nível 2

18. $z(t) = 2t^2 + 1$

21. (a) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}(\cos t - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\, t, \frac{1}{2}(\cos t + 1)), t \in [0, 2\pi[$ e $X = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
(b) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}(1 - \cos t), \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\, t, \frac{1}{2}(\cos t + 1)), t \in [0, 2\pi[$ e $X = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
(c) $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen}\, t, -\cos(2t)), t \in [0, 2\pi[$ e $X = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) + \lambda(-1, 1, 2\sqrt{2}), \lambda \in \mathbb{R}$
(d) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, -1 + 2\text{sen}\, t, -1 + \text{sen}\, t), t \in [0, 2\pi[$ e $X = (-\sqrt{2}, -1, -1) + \lambda(0, 2, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
(e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\text{sen}\, t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t), t \in [0, 2\pi[$ e $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}$
(f) $\gamma(t) = (\frac{1}{4}(t^2 - 1), t, \frac{1}{2}(t^2 + 1)), t \in \mathbb{R}$ e $X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 2, 2), \lambda \in \mathbb{R}$

22. (a) Se $c = 1$, então $x^2 + 3y^2 = 1$. Se $c = 2$, então $y = 1$ e $y = -1$. Se $c = 3$, então $-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = 1$.
(b) $\gamma(t) = (\text{sen}\, t, \frac{\cos t}{\sqrt{3}}), t \in [0, 2\pi]$.
(c) $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$
(d) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

23. (a) não existe (b) 0 (c) 0
(d) não existe (e) não existe (f) não existe
(g) não existe (h) 0 (i) 0
(j) 0 (k) não existe (l) 1
(m) não existe (n) 0

24. (a) 1 (b) 0

25. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

26. $L = 0$

27. O limite não existe.