MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral II

3ª lista de exercícios - 2015

1. Em cada caso, esboce a superfície de nível c da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
   a) $F(x,y,z) = x + 2y + 3z$ e $c = 1$ b) $F(x,y,z) = x^2 - e^y + z^2$ e $c = 0$
   c) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 0$ d) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = -1$
   e) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 1$ f) $F(x,y,z) = x^2 - y^2$ e $c = 1$

   Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

2. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ nos quais a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3, -1, 0)$ e $(5, 3, 6)$.

3. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

4. Ache a reta tangente à interseção do gráfico de $f(x,y) = x^3 + y^3 + 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

5. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1,0) = (2,1)$ e $\gamma'(t) \neq (0,0,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1, 0, -1) \in Im\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

6. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
   a) Ache a taxa de variação do potencial em $P = (3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
   b) Qual a direção e sentido em que a taxa do potencial elétrico, em P, é a maior possível? E a menor possível?
   c) Qual o valor dessa taxa máxima?

7. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D. (Esboce D.)
   a) $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$
   b) $f(x,y) = xy\, e^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$
   c) $f(x,y) = xy$; $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1,\ x \in [1,2]\right\}$
   d) $f(x,y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \in [0, \frac{1}{4}],\ y \geq 0\}$

   Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver os itens (c) e (d)?

8. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:
   a) $f(x,y) = xy$; $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$
   b) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
   c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

9. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em R sendo
   a) $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z$ e $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 56\}$
   b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z + 3x$ e
   $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 4\right\}$

10. Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C, sem parametrizar C:

   a) $f(x,y) = x^3y$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$;
   b) $f(x,y,z) = x - z$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z$ e $z = 2y\}$;
   c) $f(x,y,z) = x + y + z$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1$ e $4x + 4y = z^2\}$;
   d) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1$ e $x+y+z = 1\}$.

   Resolva os itens (a) e (b) acima utilizando uma parametrização de C.

11. Encontre o máximo e o mínimo de $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$ no compacto C.

   a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0,\ z > 0$ e $2z = 2x + y + 4\}$.
   b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0,\ z > 0$ e $2z \leq 2x + y + 4\}$.

12. Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z$. Achar o máximo e o mínimo de f em:

   a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$
   b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $z \geq \frac{1}{2}\}$
   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ e $z \geq \frac{1}{2}\}$
   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $z \geq x + y\}$

   Nos exercícios 13 e 14 prove que o problema tem solução, isto é, explique por que o ponto encontrado é, de fato, de máximo ou de mínimo.

13. a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

   b) Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$? (Para justificar, veja, por exemplo, o exercício 23).

14. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z > 0$.

15. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

   a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$ b) $z = x^2y^2$
   c) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$ d) $z = x^3y^3$
   e) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$ f) $z = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

16. Determine os valores de a para os quais a função

$$f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

   a) tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
   b) tenha exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
   c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
   d) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

Resolva os exercícios 17 a 20, a seguir, assumindo que cada problema proposto tem solução. É possível provar que essas soluções existem. Tente fazê-lo.

17. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

18. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

19. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

20. Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

Máximos e Mínimos - Cálculo 1 versus Cálculo 2

21. É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

22. Mostre que a função $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

23. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes não todas nulas. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f, então será um extremante global de f. (*Dica:* dados $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, observe que a função $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola).

RESPOSTAS

1. Apenas a superfície do item (a).

2. $\pm(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

4. $X = (1,1,4) + \lambda(-1,1,0), \lambda \in \mathbb{R}$.

5. $X = (1,0,-1) + \lambda(2,-9,-5), \lambda \in \mathbb{R}$.

6. a) $\frac{32}{\sqrt{3}}$ b) $(38,6,12)$ c) $2\sqrt{406}$.

7. a) valor mín: $f(4,0) = -7$, valor máx: $f(4,5) = 13$;
   b) valor mín: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2e}$, valor máx: $f(x,0) = f(0,y) = 0$, com $x \in [-\sqrt{2}, 0]$; $y \in [0, \sqrt{2}]$;
   c) valor mín: $f(2,-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$, valor máx: $f(2,\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$;
   d) valor mín: $f(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}) = \frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$, valor máx: f(0,1)= 1.

8. a) valor mín: $f(4,-4) = f(-4,4) = -16$, valor máx: $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$;
   b) valor mín: $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, valor máx: $\frac{2}{\sqrt{3}}$;
   c) valor mín: 0, valor máx: $\frac{1}{27}$;

9. a) valor mín: $f(1,2,3) = -14$, valor máx: $f(-2,-4,-6) = 112$;
   b) valor mín: $f(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}) = -\frac{11}{4}$, valor máx: $f(4,0,0) = 28$.

10. a) ptos de mín: $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$, ptos de máx: $\pm(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$;
    b) pto de mín: $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1+\frac{2}{\sqrt{5}}, 2+\frac{4}{\sqrt{5}})$, pto de máx: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1-\frac{2}{\sqrt{5}}, 2-\frac{4}{\sqrt{5}})$;
    c) ptos de mín: $(0,1,-2)$ e $(1,0,-2)$, pto de máx: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$;
    d) ptos de mín: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, ptos de máx: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$.

11. a) valor mín: $f(1+\frac{\sqrt{7}}{2}, 2+\sqrt{7}, 4+\sqrt{7}) = -19-6\sqrt{7}$,
    valor máx: $f(1-\frac{\sqrt{7}}{2}, 2-\sqrt{7}, 4-\sqrt{7}) = -19+6\sqrt{7}$;
    b) valor mín: $f(1+\frac{\sqrt{7}}{2}, 2+\sqrt{7}, 4+\sqrt{7}) = -19-6\sqrt{7}$,
    valor máx: $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{2}$.

12. a) ptos de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, pto de máx: $(0,0,-2)$;
    b) os mesmos que em (a);
    c) ptos de mín: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, ptos de máx: $(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$;
    d) os mesmos que em (c);
    e) pto de mín: $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, ptos de máx: $(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{1}{3} \mp \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3})$.

13. a) $(1,1)$ e $(-1,-1)$; b) $(0,-1,2)$.

14. Os vértices são $(\pm1, \pm1, 0)$ e $(\pm1, \pm1, 2)$.

15. a) pto de mín: $(-3,2)$;
    b) ptos de mín: $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
    c) pto de mín: $(\frac{1}{3}, 0)$
    d) ptos de sela: $(0,\lambda)$ e $(\lambda,0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$;
    e) ptos de sela: $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$,
    pto de máx:$(1,1)$;
    f) ptos de mín: $\pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, pto de sela: $(0,0)$,
    ptos de máx: $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

16. a) $a > 0$ b) $a < 0$ c) não d) $a = 0$.

17. $x + y + 2z - 6 = 0$

18. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5$;
    $2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$; $2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5$.

19. base 3cm $\times$ 3cm, altura 1,5cm.

20. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.