

Questão 3. (3,0) Seja C a elipse determinada pela intersecção das superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $y + 2z = 4$. Determine o(s) ponto(s) de C mais próximo(s) do ponto $P = (0, -3, 2)$. Explícite a função utilizada e justifique todas as passagens.

Solução. Seja

$$f(x, y, z) = \text{dist}((x, y, z), (0, -3, 2))^2 = x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2$$

a função que calcula o *quadrado da distancia* de um ponto arbitrário $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao ponto fixado $P = (0, -3, 2)$. Queremos determinar o(s) ponto(s) de C onde a restrição de f a C assume seu valor mínimo.

Sejam $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $h(x, y, z) = y + 2z - 4$. Como a elipse C é a intersecção do cone $g(x, y, z) = 0$ com o plano $h(x, y, z) = 0$, segue-se que C é um conjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^3 . Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, a restrição de f a C assume seus valores máximo e mínimo em pontos de C .

Para determinarmos esses pontos, observamos que esse problema é equivalente a determinarmos os extremantes de f com as duas restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$. Como f , g e h são funções de classe C^∞ , podemos usar Multiplicadores de Lagrange: se $(x, y, z) \in C$ é um extremante, então existem números reais λ e μ tais que $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$, ou, equivalentemente, $\{\nabla f(x, y, z), \nabla g(x, y, z), \nabla h(x, y, z)\}$ é *linearmente dependente*.

Agora, $\{\nabla f(x, y, z), \nabla g(x, y, z), \nabla h(x, y, z)\}$ é *linearmente dependente* se e somente se

$$\begin{vmatrix} 2x & 2(y+3) & 2(z-2) \\ 2x & 2y & -2z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Usando propriedades de determinantes (subtraindo a 2a. linha da primeira e expandindo o determinante pela 1a. coluna), obtemos

$$\begin{vmatrix} 2x & 2(y+3) & 2(z-2) \\ 2x & 2y & -2z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4z-4 \\ 2x & 2y & -2z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2x)(12 - 4z + 4) = 8x(z - 4).$$

Assim, $(x, y, z) \in C$ é extremante se e somente se (x, y, z) é solução do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ y + 2z = 4 \\ x(z - 4) = 0 \end{cases}$$

A 3a. equação implica $x = 0$ ou $z = 4$. Se $x = 0$, então $z = \pm y$ (1a. eq.) e $y + 2z = 4$ (2a. eq.), o que implica que $x = 0$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{4}{3}$ ou $x = 0$, $y = -4$, $z = 4$, obtendo assim os pontos $P_1 = (0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ e $P_2 = (0, -4, 4)$. Se $z = 4$, então $y = -4$ e $x = 0$ e voltamos a obter o ponto P_2 .

Assim, $P_1 = (0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ e $P_2 = (0, -4, 4)$ são as únicas soluções do sistema acima. Como

$$f(P_1) = f(0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = 0^2 + (\frac{4}{3} + 3)^2 + (\frac{4}{3} - 2)^2 = \frac{173}{9} = 19,222\dots$$

e

$$f(P_2) = f(0, -4, 4) = 0^2 + (-4 + 3)^2 + (4 - 2)^2 = 5,$$

segue-se que P_1 é o ponto mais distante de P e $P_2 = (0, -4, 4)$ é o *mais próximo* de P .

Observação: se f é uma função não-negativa, então os valores máximos (ou mínimos) de f e de f^2 são assumidos nos mesmos pontos.