Questão 3. (3,0) Seja C a elipse determinada pela intersecção das superfícies $x^2+y^2-z^2=0$ e $x+2z=4$. Determine o(s) ponto(s) de C mais próximo(s) do ponto $P=(-3,0,2)$. Explicite a função utilizada e justifique todas as passagens.

Solução. Seja

$$f(x,y,z)=\text{dist}((x,y,z),(-3,0,2))^2=(x+3)^2+y^2+(z-2)^2$$

a função que calcula o *quadrado da distancia* de um ponto arbitrário $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ao ponto fixado $P=(-3,0,2)$. Queremos determinar o(s) ponto(s) de C onde a restrição de f a C assume seu valor mínimo.

Sejam $g(x,y,y,z)=x^2+y^2-z^2$ e $h(x,y,z)=x+2z-4$. Como a elipse C é a intersecção do *cone* $g(x,y,z)=0$ com o *plano* $h(x,y,z)=0$, segue-se que C é um conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^3$. Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, a restrição de f a C assume seus valores máximo e mínimo em pontos de C.

Para determinarmos esses pontos, observamos que esse problema é equivalente a determinarmos os extremantes de f com as duas restrições $g(x,y,z)=0$ e $h(x,y,z)=0$. Como f, g e h são funções de classe C^∞, podemos usar Multiplicadores de Lagrange: se $(x,y,z)\in C$ é um extremante, então existem números reais λ e μ tais que $\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)+\mu\nabla h(x,y,z)$, ou, equivalentemente, $\{\nabla f(x,y,z),\nabla g(x,y,z),\nabla h(x,y,z)\}$ é *linearmente dependente.*

Agora, $\{\nabla f(x,y,z),\nabla g(x,y,z),\nabla h(x,y,z)\}$ é *linearmente dependente* se e somente se

$$\begin{vmatrix} 2(x+3) & 2y & 2(z-2) \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Usando propriedades de determinantes (subtraindo a 2a. linha da primeira e expandindo o determinante pela 2a. coluna), obtemos

$$\begin{vmatrix} 2(x+3) & 2y & 2(z-2) \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4z-4 \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2y(12-4z+4)=8y(4-z).$$

Assim, $(x,y,z)\in C$ é extremante se e somente se (x,y,z) é solução do sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x+2z=4 \\ y(z-4)=0 \end{cases}$$

A 3a. equação implica $y=0$ ou $z=4$. Se $y=0$, então $z=\pm x$ (1a. eq.) e $x+2z=4$ (2a. eq.), o que implica que $x=\frac{4}{3}$, $y=0$, $z=\frac{4}{3}$ ou $x=-4$, $y=0$, $z=4$, obtendo assim os pontos $P_1=(\frac{4}{3},0,\frac{4}{3})$ e $P_2=(-4,0,4)$. Se $z=4$, então $x=-4$ e $y=0$ e voltamos a obter o ponto P_2.

Assim, $P_1=(\frac{4}{3},0,\frac{4}{3})$ e $P_2=(-4,0,4)$ são as únicas soluções do sistema acima. Como

$$f(P_1)=f(\frac{4}{3},0,\frac{4}{3})=(\frac{4}{3}+3)^2+0^2+(\frac{4}{3}-2)^2=\frac{173}{9}=19,222...$$

e

$$f(P_2)=f(-4,0,4)=(-4+3)^2+0^2+(4-2)^2=5,$$

segue-se que P_1 é o ponto mais distante de P e $P_2=(-4,0,4)$ é o *mais próximo* de P.

Observação: se f é uma função não-negativa, então os valores máximos (ou mínimos) de f e de f^2 são assumidos nos mesmos pontos.