Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que satisfaz

(i) a imagem da curva $\gamma(t) = (t^3+1, t, t^2-t)$ está contida no gráfico de f;

(ii) $f(s^2, s-1) = 2$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Considere o ponto $P = (0, -1, f(-1, 0))$.

a) (1,0) Determine $f(0,-1)$ e dê uma equação para a reta tangente à curva γ em P.

b) (1,5) Calcule $\nabla f(0,-1)$ e dê a equação do plano tangente ao gráfico de f em P.

c) (1,5) A superfície $2yz - 2x + z^2 = 0$ intercepta o gráfico de f em uma curva C que contém P. Determine uma equação para a reta tangente à curva C no ponto P.

Solução.

a) Fazendo $s = 0$ em (ii), obtemos imediatamente $f(0,-1) = 2$. Como $\gamma(-1) = (0,-1,2) = P$ e $\gamma'(t) = (3t^2, 1, 2t-1)$, temos $\gamma'(-1) = (3, 1, -3)$. Portanto, a reta tangente a γ em P é

$$T : (x, y, z) = (0, -1, 2) + \lambda(3, 1, -3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) (i) é equivalente a $f(t^3+1, t) = t^2 - t$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como f é diferenciável, podemos usar a Regra da Cadeia e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t^3+1, t) \cdot 3t^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(t^3+1, t) \cdot 1 = 2t - 1,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Fazendo $t = -1$, temos

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = -3.$$

Analogamente, derivando (ii) com relação a s, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s^2, s-1) \cdot 2s + \frac{\partial f}{\partial y}(s^2, s-1) \cdot 1 = 0,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Fazendo $s = 0$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = 0.$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = -1$ e $\nabla f(0,-1) = -\vec{i}$. Portanto, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto P é $z - 2 = (-1)(x-0) + 0(y+1)$, isto é, $x + z = 2$.

c) Se $\vec{v}_C$ é um vetor diretor da reta tangente T_C à curva C no ponto P, então sua equação é $T_C : X = P + \mu\vec{v}_C$, com $\mu \in \mathbb{R}$. Para determinar $\vec{v}_C$, usamos o fato de que $\vec{v}_C$ é paralelo ao vetor $\nabla G(0,-1,2) \wedge \nabla H(0,-1,2)$, onde $G(x,y,z) = f(x,y) - z$ e $H(x,y,z) = 2yz - 2x + z^2$ são funções cujas superfícies de nível zero são o gráfico de f e a superfície dada, respectivamente. Como

$$\nabla G(0,-1,2) \wedge \nabla H(0,-1,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (4, 4, -4) = 4(1, 1, -1),$$

podemos tomar $\vec{v}_C = (1, 1, -1)$ e escrever a equação paramétrica da reta tangente à curva C no ponto P como

$$(x, y, z) = (0, -1, 2) + \mu(1, 1, -1), \text{ com } \mu \in \mathbb{R}.$$