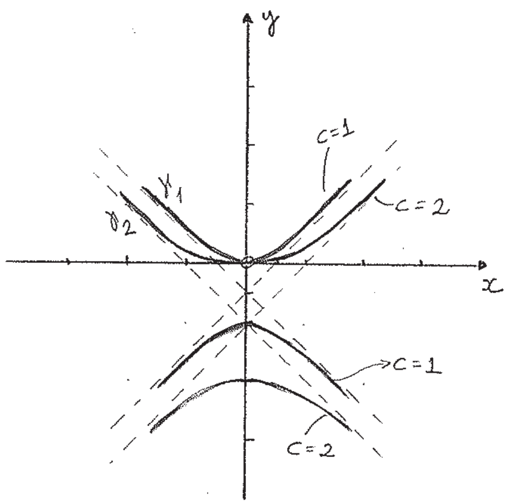
Questão 1. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{y}, & \text{se } y \neq 0, \\ 0, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

a) (1,0) Esboce, no sistema de coordenadas abaixo, as curvas de nível 1 e 2 de f.

b) (1,0) A função f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

c) (1,0) Determine, caso exista, $\nabla f(0,0)$.



(a) $f(x,y) = 1 \iff x^2 - y^2 = y \quad (y \neq 0)$

$\iff x^2 - (y^2 + y + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \quad (y \neq 0)$

$\iff \underbrace{-4x^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1}_{\text{equaçaõ de hipérbole}}, \quad (y \neq 0)$

$f(x,y) = 2 \iff x^2 - y^2 = 2y, \quad y \neq 0$

$\iff x^2 - (y^2 + 2y + 1) = -1 \quad (y \neq 0)$

$\iff \underbrace{-x^2 + (y+1)^2 = 1}_{\text{hipérbole}}, \quad (y \neq 0)$

(b) Notamos que os ramos de cada hipérbole encontrada em (a) que têm $y \geq 0$ contêm o ponto $(0,0)$.

Se considerarmos parametrizações γ_1 e γ_2 para os ramos das hipérboles $-4x^2 + 4(y+\frac{1}{2}) = 1$, $y \geq 0$ e $-x^2 + (y+1)^2 = 1$, $y \geq 0$ respectivamente, veremos que $f(\gamma_1(t)) = 1, \forall t$ e $f(\gamma_2(t)) = 2, \forall t$. Consequentemente, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe e f não é contínua em (0,0).

obs. $\begin{cases} \gamma_1(t) = \left(\frac{\operatorname{tg} t}{2}, -\frac{1+\sec t}{2}\right), \ t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad ; \ (\gamma_1(0) = (0,0)) \\ \gamma_2(t) = (\operatorname{tg} t, -1 + \sec t), \ t \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\quad , \ (\gamma_2(0) = (0,0)) \end{cases}$

são possíveis parametrizações para os referidos ramos.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k}{k} = -1$

Portanto, $\nabla f(0,0) = (0,-1)$ ou $\nabla f(0,0) = -\vec{j}$