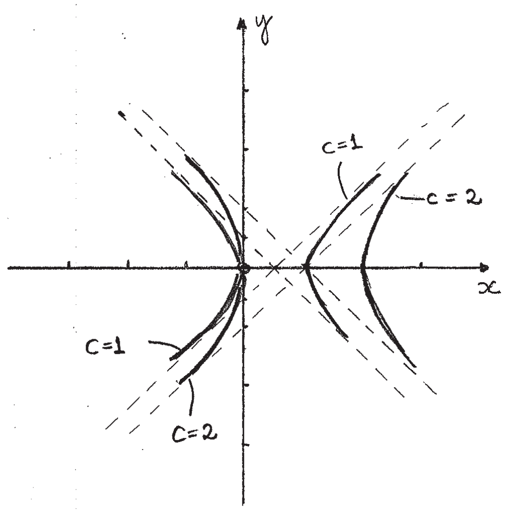
Questão 1. Seja

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x}, & \text{se } x\neq 0,\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

a) (1,0) Esboce, no sistema de coordenadas abaixo, as curvas de nível 1 e 2 de f.

b) (1,0) A função f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

c) (1,0) Determine, caso exista, $\nabla f(0,0)$.



(a) $f(x,y)=1 \iff x^2-y^2=x \quad , x\neq 0$

$\iff \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-y^2=\frac{1}{4} \quad , x\neq 0$

$\iff \underbrace{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4y^2=1}_{\text{equação de hipérbole (1)}} \quad , x\neq 0$

$f(x,y)=2 \iff x^2-y^2=2x \quad , x\neq 0$

$\iff \left(x^2-2x+1\right)-y^2=1 \quad , x\neq 0$

$\iff \underbrace{(x-1)^2-y^2=1}_{\text{hipérbole (2)}} \quad , x\neq 0$

(b) Notamos que os ramos das hipérboles (1) e (2) encontradas em (a) que têm $x\leq 0$ contêm o ponto $(0,0)$.
Se considerarmos parametrizações γ_1 e γ_2 respectivamente para os ramos da hipérbole (1) com $x\leq 0$ e da hipérbole (2) com $x\leq 0$, veremos que $f(\gamma_1(t))=1, \forall t$ e $f(\gamma_2(t))=2, \forall t$.
Consequentemente, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe e f não é contínua em $(0,0)$.

obs $\begin{cases}\gamma_1(t)=\left(\dfrac{1+\sec t}{2}, \dfrac{\operatorname{tg} t}{2}\right), & t\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\;;\quad (\gamma_1(\pi)=(0,0))\\ \gamma_2(t)=(1+\sec t, \operatorname{tg} t), & t\in\left]\pi/2,\frac{3\pi}{2}\right[\;;\quad (\gamma_2(\pi)=(0,0))\end{cases}$

são possíveis parametrizações para os referidos ramos.

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0-0}{k}=0$

Portanto, $\nabla f(0,0)=(1,0)$ ou $\nabla f(0,0)=\vec{i}$