1. (2,5) Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) (0,5) A função f é contínua em $(0,0)$? Justifique.

b) (1,0) Determine, caso exista, $\nabla f(0,0)$.

c) (1,0) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5\overbrace{x^2}^{\text{limitada}}\overbrace{y}^{\to 0}}{x^2+y^4} = 0 = f(0,0)$$

$$\left(0 \leq x^2 \leq x^2+y^4 \implies 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^4} \leq 1 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)\right)$$

Logo f é contínua em $(0,0)$.

(b) $$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Assim, $\boxed{\nabla f(0,0) = (0,0)}$

(c) $$E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

$$= \frac{5x^2y}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Seja $\phi(x,y) = \dfrac{5x^2y}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\gamma(t) = (t,t)$.

$\gamma(0) = (0,0)$ e γ é contínua em $t=0$.

$$\lim_{t\to 0} \phi(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{5t^3}{(t^2+t^4)\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{5t}{\underbrace{(1+t^2)}_{\to 1}\sqrt{2}\,|t|}$$

Mas esse limite não existe pois
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{5t}{(1+t^2)\sqrt{2}\,t} = 5/\sqrt{2} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0^-} -\frac{5t}{(1+t^2)\sqrt{2}\,t} = -5/\sqrt{2}.$$

Logo f NÃO é diferenciável em $(0,0)$.

3. (2,0) A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $f(-t,t) = 2t^3 - t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Sabendo que o ponto $(0,2,12)$ pertence ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-1,1,1)$, determine $\nabla f(-1,1)$ e dê a equação do plano tangente.

Seja $\nabla f(-1,1) = (a,b)$. Então a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(-1,1)$ é

$$z = 1 + a(x+1) + b(y-1)$$

Como o ponto $(0,2,12)$ pertence a esse plano temos que

$$12 = 1 + a + b \implies \boxed{a+b = 11}$$

Como $f(-t,t) = 2t^3 - t$, temos, pela Regra da cadeia que

$$6t^2 - 1 = \langle \nabla f(-t,t), (-1,1) \rangle$$

Fazendo $\boxed{t = 1}$

$$5 = \langle (a,b), (-1,1) \rangle$$

Portanto $\boxed{-a + b = 5}$.

Resolvendo o sistema temos $\boxed{b = 8}$ e $\boxed{a = 3}$.

Logo $\boxed{\nabla f(-1,1) = (3,8)}$ e a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(-1,1,1)$ é

$$\boxed{z = 1 + 3(x+1) + 8(y-1)}.$$

2. (1,5) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja π o plano tangente à superfície de nível 0 de F no ponto $(-2, 4, -2)$. Suponha que as duas afirmações abaixo sejam verdadeiras.

a) A curva $\sigma :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(t) = (t, t^2, t^3 + 2t^2 + t)$ tem sua imagem contida na superfície de nível 0 de F.

b) A reta r, dada por $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \alpha(1, -2, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é paralela ao plano π.

Determine a equação do plano π.

Suponha que $\nabla F(-2, 4, -2) = (a, b, c)$.

Da hipótese (a)

$\sigma(-2) = (-2, 4, -2)$, então $\sigma'(-2) \perp (a, b, c)$

Como $\sigma'(t) = (1, 2t, 3t^2 + 4t + 1)$ então $\sigma'(-2) = (1, -4, 5)$.

Assim, $(1, -4, 5) \perp (a, b, c)$.

Da hipótese (b) vem que $(a, b, c) \perp (1, -2, 0)$.

Logo, $(a, b, c) \parallel (1, -2, 0) \wedge (1, -4, 5)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -10\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

Logo $(a, b, c) = \lambda(-10, -5, -2)$, $\lambda \neq 0$

A equação do plano tangente em $(-2, 4, -2)$ é então

$$-10\lambda(x+2) - 5\lambda(y-4) - 2\lambda(z+2) = 0$$

ou equivalentemente

$$10(x+2) + 5(y-4) + 2(z+2) = 0$$

4. (4,0) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{2a}{3}y^3 + x^2 - \frac{5a}{2}y^2 - 4x + 3$$

para um real $a \neq 0$ fixado.

a) (2,0) Determine os pontos críticos de f e classifique-os, em função do parâmetro a.

b) (2,0) Faça $a = -1$ e determine o <u>valor máximo</u> e o <u>valor mínimo</u> de f em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2(x-2)^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ay^2 - 5ay$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

Como $a \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow 2y^2 - 5y = 0 \Rightarrow$ $y = 0$ ou $y = 5/2$. Assim, os pontos críticos são $(2,0)$ e $(2, 5/2)$.

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4ay - 5a \end{vmatrix} = 2a(4y - 5)$$

$H(2,0) = -10a \qquad H(2, 5/2) = 10a$

$\boxed{a > 0}$ $(2,0)$ é ponto de sela

$(2, 5/2)$ é ponto de mínimo local já que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 > 0$.

$a < 0$ $(2,0)$ é ponto de mínimo local

e $(2, 5/2)$ é ponto de sela.

(b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 2(x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$

Candidatos a pontos de máximo e de mínimo de f em C:

— pontos críticos no interior de C:

$\text{int}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 2(x-2)^2 + y^2 < 4\}$

$(2,0) \in \text{int}(C)$ e $(2, 5/2) \notin \text{int}(C)$ pois $\frac{25}{4} > 4$.

$a = -1$

$f(x,y) = -\frac{2}{3}y^3 + x^2 + \frac{5}{2}y^2 - 4x + 3$

— Para achar os candidatos a pontos de máx e mín de f na fronteira de C, vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange.

$$\text{fr}\, C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{2(x-2)^2 + y^2}_{g(x,y)} = 4\}$$

$\nabla g(x,y) = (4(x-2), 2y) \neq \vec{0} \quad \forall (x,y) \in \text{fr}\, C$.

Os pontos de máx e mín de f em fr C estão entre os pontos que satisfazem:

"$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ e $2(x-2)^2 + y^2 = 4$."

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} 2x-4 & -2y^2+5y \\ 4(x-2) & 2y \end{vmatrix} = 0 \;(*)} \quad \text{e} \quad \boxed{2(x-2)^2 + y^2 = 4.}$$

De $(*)$ $2y(2x-4) - 4(x-2)(-2y^2+5y) = 0$

$4y(x-2) - 4(x-2)(-2y^2+5y) = 0$

$\Rightarrow 4(x-2)[y + 2y^2 - 5y] = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = 2}$ ou $\boxed{2y^2 - 4y = 0}$

$\boxed{x = 2}$ e $2(x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$

$y = \pm 2$

Candidatos: $(2,2)$ e $(2,-2)$

$\boxed{2y^2 - 4y = 0} \Rightarrow y = 0$ ou $y = 2$

$y = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 2$

$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

Candidatos: $(2+\sqrt{2}, 0)$ e $(2, -\sqrt{2}, 0)$.

$y = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Candidato (x, y)	$f(x,y)$
$(2,0)$	$-4+3 = \boxed{-1}$ MÍN
$(2,2)$	$-\frac{2}{3}\cdot 8 + 4 + \frac{5}{2}\cdot 8 - 8 + 3 = -1 - \frac{16}{3} + 20 = -\frac{16}{3} + 19$
$(2,-2)$	$-4 + \frac{2}{3}\cdot 8 + \frac{5}{2}\cdot 4 + 3 = \boxed{19 + \frac{16}{3}}$ MÁX
$(2+\sqrt{2}, 0)$	$(2+\sqrt{2})^2 - 4(2+\sqrt{2}) = 4 + \cancel{4\sqrt{2}} + 2 - 8 - \cancel{4\sqrt{2}} + 3 = 1$
$(2-\sqrt{2}, 0)$	$(2-\sqrt{2})^2 - 4(2-\sqrt{2}) = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 8 + 3 = 1$

Assim $(2,-2)$ é ponto de máximo de f em C

$(2,0)$ é ponto de mínimo de f em C

Valor máximo: $19 + \frac{16}{3}$ VALOR MÍNIMO: -1