Questão 3. Dada a função $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$:

a) (1,5) classifique os pontos críticos de f;

b) (1,5) determine os valores máximo e mínimo de f no compacto

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x - y = 0,\ -1 \le x \le \frac{1}{2}\}.$$

a) f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e $\nabla f(x,y) = (3x^2+3y, 3y^2+3x)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ x = -y^2 \end{cases} \Rightarrow y = -y^4 \Rightarrow y(1+y^3) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = -1$ logo, $(0,0)$ e $(-1,-1)$ são os pontos críticos.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3$

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ é ponto de sela}}$

$H(-1,-1) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 27 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{(-1,-1) \text{ é máximo local}}$

b) f contínua em R compacto $\Rightarrow f$ tem máx e mín absolutos pelo T. de Weierstrass

$R = B \cup \{(-1, 1/2), (1/2, -1)\}$, em que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - x - y = 0$ e $-1 < x < 1/2\}$

Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1/2\}$. Então A é aberto, f é diferenciável em A, $B = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$, onde $g(x,y) = xy - x - y$ é de classe C^1 em A e $\nabla g(x,y) = (y-1, x-1) \neq \vec{0}$ em B (pois $\nabla g(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow (x,y) = (1,1) \notin B$.)

Pelo método dos Multiplicadores de Lagrange, se (x,y) é extremo local de f em B então $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, o que implica que $\nabla f(x,y)$ e $\nabla g(x,y)$ são l.d.

Logo, $0 = \begin{vmatrix} x^2+y & y^2+x \\ y-1 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + xy - y - y^3 - xy + y^2 + x = (x-y)(x^2+xy+y^2-x-y+1)$

$\overset{xy-x-y=0}{=} (x-y)(\underbrace{x^2+y^2+1}_{>0})$

$xy - x - y = 0$, $-1 < x < \frac{1}{2}$

Portanto, $\begin{cases} x = y \\ xy - x - y = 0 \\ -1 < x < 1/2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\cancel{x = 2}$ $(0,0)$ é o único candidato a extremo de f em B

Candidatos a extremo de f em R:

$(0,0)$, $(-1, 1/2)$, $(1/2, -1)$

$f(0,0) = 0$ $\qquad f(-1, 1/2) = f(1/2, -1) = -\frac{19}{8}$

$\uparrow$ máximo absoluto $\qquad \uparrow$ mínimo absoluto