Questão 3. Dada a função $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$:

a) (1,5) classifique os pontos críticos de f;

b) (1,5) determine os valores máximo e mínimo de f no compacto

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + x + y = 0,\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}.$$

a) f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow y = y^4 \Rightarrow y(1-y^3) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$. Logo, $(0,0)$ e $(1,1)$ são os pontos críticos.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow \boxed{(0,0) \text{ é ponto de sela}}$

$H(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow \boxed{(1,1) \text{ é mínimo local.}}$

b) f contínua em R compacto $\Rightarrow$ f tem máx e mín absolutos em R, pelo T. Weierstrass.
$R = B \cup \{(-1/2, 1), (1, -1/2)\}$, em que $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy + x + y = 0, -1/2 < x < 1\}$.
Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1/2 < x < 1\}$. Então A é aberto, f é diferenciável em A, $B = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$, onde $g(x,y) = xy + x + y$ é de classe C^1 em A e $\nabla g(x,y) = (y+1, x+1) \neq \vec{0}$ em B (pois $\nabla g(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow (x,y) = (-1,-1) \notin B$).
Pelo método dos Multiplicadores de Lagrange, se (x,y) é extremo local de f em B então $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, o que implica que $\nabla f(x,y)$ e $\nabla g(x,y)$ são l.d.

Logo, $\begin{cases} 0 = \begin{vmatrix} x^2 - y & y^2 - x \\ y+1 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 + x^2 - \cancel{xy} - y - y^3 - y^2 + \cancel{xy} + x = (x-y)(x^2 + xy + y^2 + x + y + 1) \\ xy + x + y = 0,\ -\frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

$\overset{xy+x+y=0}{=} (x-y)\underbrace{(x^2 + y^2 + 1)}_{>0}$

Portanto, $\begin{cases} x = y \\ xy + x + y = 0 \\ -1/2 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\cancel{x = -2}$

$(0,0)$ é o único candidato a extremo de f em B.

Candidatos a extremo de f em R:

$(0,0)$, $(-1/2, 1)$ e $(1, -1/2)$

$f(0,0) = 0$, $f(-1/2, 1) = f(1, -1/2) = \frac{19}{8}$

$\uparrow$ mínimo absoluto

$\uparrow$ máximo absoluto