Questão 2. (3,5) Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z) = x^2 - yz + 6x$, sobre os seguintes conjuntos (**justifique**):

a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 36\right\}$;

Considere a função $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 36$ de classe $\mathcal{C}^1$. Como $\nabla f(x,y,z) = (2x+6, -z, -y)$ e $\nabla g(x,y,z) = (8x, 2y, 2z)$, então, usando o Multiplicadores de Lagrange com uma condição, temos $\nabla f(x,y,z) // \nabla g(x,y,z) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x+6 & -z & -y \\ 8x & 2y & 2z \end{vmatrix} = (-2z^2 + 2y^2, -8xy - 4xz - 12z, 4xy + 12y + 8xz) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = z^2 \\ 2xy + xz + 3z = 0 \\ xy + 3y + 2xz = 0 \\ 4x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{as soluções do sistema } (3,0,0), (-3,0,0), (-1,4,4) \text{ e } (-1,-4,-4)$$

são os candidatos a máximos e mínimos de f sobre S.

Como $f(3,0,0) = 27$, $\quad f(-3,0,0) = -9 \quad$ e $\quad f(-1,\underline{+}4,\underline{+}4) = -21$, temos que o valor máximo de f sobre S é 27 e o valor mínimo é -21.

b) $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 36 \text{ e } x \leq 2\right\}$.

b_1) Para determinar os máximos e mínimos de f para $4x^2 + y^2 + z^2 = 36$ e $x = 2$, utilizaremos os Multiplicadores de Lagrange com duas condições. Considere a função $h(x,y,z) = x - 2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Temos que $\nabla F(x,y,z) = (1,0,0)$.

$$\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2x+6 & -z & -y \\ 8x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2y^2 - 2z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = z^2 \\ 4x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{as soluções do sistema } (2, \pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}) \text{ e } (2, \pm\sqrt{10}, \mp\sqrt{10}) \text{ são}$$

os candidatos a máximos e mínimos de f para $4x^2 + y^2 + z^2 = 36$ e $x = 2$.

b_2) Para $x < 2$ consideraremos apenas os pontos $(-3, 0, 0)$, $(-1, 4, 4)$ e $(-1, -4, -4)$ do item (a).

De (b_1) e (b_2), como $f(-3, 0, 0) = -9$, $f(-1, \pm 4, \pm 4) = -21$, $f(2, \pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10}) = 6$ e $f(2, \pm\sqrt{10}, \mp\sqrt{10}) = 26$, temos que o valor máximo de f sobre R é 26 e o valor mínimo é -21.