**Questão 2.** (3,5) Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de $f(x,y,z) = y^2 - xz + 6y$, sobre os seguintes conjuntos (**justifique**):

a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 = 36\right\};$

Considere a função $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 36$ de classe $\mathcal{C}^1$. Como $\nabla f(x,y,z) = (-z, 2y+6, -x)$ e $\nabla g(x,y,z) = (2x, 8y, 2z)$, então, usando o Multiplicadores de Lagrange com uma condição, temos $\nabla f(x,y,z) // \nabla g(x,y,z) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -z & 2y+6 & -x \\ 2x & 8y & 2z \end{vmatrix} = (4yz + 12z + 8xy, -2x^2 + 2z^2, -8yz - 4xy - 12x) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz + 3z + 2xy = 0 \\ x^2 = z^2 \\ 2yz + xy + 3x = 0 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{as soluções do sistema } (0,3,0), (0,-3,0), (4,-1,4) \text{ e } (-4,-1,-4)$$

são os candidatos a máximos e mínimos de $f$ sobre $S$.

Como $f(0,3,0) = 27$, $f(0,-3,0) = -9$ e $f(\pm 4, -1, \pm 4) = -21$, temos que o valor máximo de $f$ sobre $S$ é 27 e o valor mínimo é $-21$.

b) $R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^2 = 36 \text{ e } y \leq 2\right\}.$

$\text{b}_1$) Para determinar os máximos e mínimos de $f$ para $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ e $y = 2$, utilizaremos os Multiplicadores de Lagrange com duas condições. Considere a função $h(x,y,z) = y - 2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Temos que $\nabla F(x,y,z) = (0,1,0)$.

$$\{\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\} \text{ é l.d.} \Rightarrow \begin{vmatrix} -z & 2y+6 & -x \\ 2x & 8y & 2z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2z^2 - 2x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = z^2 \\ x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$ as soluções do sistema $(\pm\sqrt{10}, 2, \pm\sqrt{10})$ e $(\pm\sqrt{10}, 2, \mp\sqrt{10})$ são os candidatos a máximos e mínimos de $f$ para $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ e $y = 2$.

$b_2$) Para $y < 2$ consideraremos apenas os pontos $(0, -3, 0)$, $(4, -1, 4)$ e $(-4, -1, -4)$ do item (a).

De ($b_1$) e ($b_2$), como $f(0, -3, 0) = -9$, $f(\pm 4, -1, \pm 4) = -21$, $f(\pm\sqrt{10}, 2, \pm\sqrt{10}) = 6$ e $f(\pm\sqrt{10}, 2, \mp\sqrt{10}) = 26$, temos que o valor máximo de $f$ sobre $R$ é 26 e o valor mínimo é $-21$.