-B-

Questão 1.

a) (1,0) Seja S a superfície de equação $2xy - 2x^2 + z^2 + 6z = 1$. Encontre o plano tangente a S no ponto $(-1, -4, -1)$.

b) (1,5) Considere a curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 = 1,\ 4x + 2y = z^2 \text{ e } z < 0\}$. Determine os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao plano encontrado no item (a).

c) (1,0) Encontre uma parametrização para a intersecção da superfície S do item (a) com o plano $3x = y$.

a) S é superfície de nível de $F(x,y,z) = 2xy - 2x^2 + z^2 + 6z$

$\nabla F(x,y,z) = (2y - 4x,\ 2x,\ 2z + 6)$

$\nabla F(-1,-4,-1) = (-4, -2, 4) \parallel (2, 1, -2)$

Equação do plano: $2(x+1) + (y+4) - 2(z+1) = 0$

b) $$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8x_0 & 2y_0 & 0 \\ 4 & 2 & -2z_0 \end{vmatrix} = -4y_0 z_0 \vec{i} + 16x_0 z_0 \vec{j} + (16x_0 - 8y_0)\vec{k}$$

A reta tangente a C em (x_0, y_0, z_0) é paralela a $(-4y_0 z_0, 16x_0 z_0, 16x_0 - 8y_0)$. Para que essa reta seja paralela ao plano de a), devemos ter

$$0 = \langle (-4y_0 z_0, 16x_0 z_0, 16x_0 - 8y_0), (2, 1, -2) \rangle =$$
$$= -8y_0 z_0 + 16x_0 z_0 - 2(16x_0 - 8y_0) = \underbrace{(z_0 - 2)}_{\neq 0}(16x_0 - 8y_0).$$

Como (x_0, y_0, z_0) está em C, temos $z_0 < 2$. Logo

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 \\ 4x_0^2 + y_0^2 = 8x_0^2 = 1 \\ 4x_0 + 2y_0 = 8x_0 = z_0^2 \quad (\therefore x_0 \geq 0) \\ z_0 < 0 \end{cases}$$

$\therefore x_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad z_0 = -\sqrt{\dfrac{8}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{-2}{\sqrt[4]{2}}$

Resposta: $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}\right)$

c) $\begin{cases} 2xy - 2x^2 + z^2 + 6z = 1 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 2x^2 + z^2 + 6z = 1 \\ y = 3x \end{cases}$

B

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (z+3)^2 = 10 \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{10}} x\right)^2 + \left(\frac{z+3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 \\ x = 3y \end{cases}$

$\therefore \quad \frac{2}{\sqrt{10}} x = \cos t \qquad \frac{z+3}{\sqrt{10}} = \operatorname{sen} t \quad , \quad y = 3x$

Uma parametrização é:

$\Gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \cos t, \ \frac{3}{2} \sqrt{10} \cos t \ , \ \sqrt{10} \operatorname{sen} t - 3 \right), t \in [0, 2\pi]$