Questão 1.

a) (1,0) Seja S a superfície de equação $2xy - 2y^2 + z^2 + 6z = 1$. Encontre o plano tangente a S no ponto $(-4, -1, -1)$.

b) (1,5) Considere a curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = 1,\ 2x + 4y = z^2 \text{ e } z < 0\}$. Determine os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao plano encontrado no item (a).

c) (1,0) Encontre uma parametrização para a intersecção da superfície S do item (a) com o plano $x = 3y$.

a) S é superfície de nível de $F(x,y,z) = 2xy - 2y^2 + z^2 + 6z$

$\nabla F(x,y,z) = (2y, 2x - 4y, 2z + 6)$

$\nabla F(-4,-1,-1) = (-2, -4, 4) \parallel (1, 2, -2)$

Equação do plano: $(x+4) + 2(y+1) - 2(z+1) = 0$

b) $$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x_0 & 8y_0 & 0 \\ 2 & 4 & -2z_0 \end{vmatrix} = -16 y_0 z_0 \vec{i} + 4 x_0 z_0 \vec{j} + (8x_0 - 16 y_0)\vec{k}$$

A reta tangente a C em (x_0, y_0, z_0) é paralela a $(-16 y_0 z_0, 4 x_0 z_0, 8x_0 - 16 y_0)$. Para que essa reta seja paralela ao plano de a), devemos ter

$$0 = \langle (-16 y_0 z_0, 4x_0 z_0, 8x_0 - 16 y_0), (1, 2, -2) \rangle =$$

$$= \underbrace{-16 y_0 z_0 + 8 x_0 z_0} - 2(8x_0 - 16 y_0) = \underbrace{(z_0 - 2)}_{\neq 0}(8x_0 - 16 y_0)$$

Como (x_0, y_0, z_0) está em C, temos $z_0 < 0$. Logo

$$\begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ x_0^2 + 4y_0^2 = 8y_0^2 = 1 \\ 2x_0 + 4y_0 = 8y_0 = z_0^2 \quad (\therefore y_0 \geq 0) \\ z_0 < 0 \end{cases}$$

$\therefore\ y_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \quad x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_0 = -\sqrt{\dfrac{8}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{-2}{\sqrt[4]{2}}$

Resposta: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{-2}{\sqrt[4]{2}}\right)$

A

c) $\begin{cases} 2xy - 2y^2 + z^2 + 6z = 1 \\ x = 3y \end{cases} \iff$

$\begin{cases} 6y^2 - 2y^2 + z^2 + 6z = 1 \\ x = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} 4y^2 + (z+3)^2 = 10 \\ x = 3y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{10}} y\right)^2 + \left(\frac{z+3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 \\ x = 3y \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{10}} y = \cos t \\ \frac{z+3}{\sqrt{10}} = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad x = 3y$

Uma parametrização é

$\Gamma(t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{10}\cos t,\ \frac{\sqrt{10}}{2}\cos t,\ \sqrt{10}\operatorname{sen} t - 3\right),\ t \in [0, 2\pi]$