4. **(1,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas

$$\gamma(t) = (t^2, t+1, t^4 + 2t^3 + t^2 - t - 1), t \in \mathbb{R}$$

e

$$\sigma(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, \cos u - \cos^3 u - \operatorname{sen} u), u \in [0, 2\pi]$$

estão contidas no gráfico de f. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 1, f(0,1))$.

$\gamma(0) = (0,1,-1)$ e $\sigma(\pi/2) = (0,1,-1)$; $f(0,1) = -1$

Como $Im(\gamma)$ e $Im(\sigma)$ estão contidas no gráfico da função diferenciável f, sabemos que $\gamma'(0)$ e $\sigma'(\pi/2)$ são vetores paralelos ao plano tangente ao gráfico de f em $(0,1,-1)$. Como $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1), -1\right)$ é um vetor normal a este plano, temos:

$$\vec{n} \cdot \gamma'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{n} \cdot \sigma'(\pi/2) = 0 \qquad (*)$$

Por outro lado, $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t^3 + 6t^2 + 2t - 1) \Rightarrow \gamma'(0) = (0,1,-1)$

e $\sigma'(u) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, -\operatorname{sen} u + 3\cos^2 u \operatorname{sen} u - \cos u) \Rightarrow \sigma'(\pi/2) = (-1, 0, -1)$

As equações em $(*)$ ficam:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) + 1 = 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1$$

O plano pedido tem equação

$$x - y - z = 0$$