4. **(1,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas

$$\gamma(t) = (t+1, t^2, t^4 + 2t^3 + t^2 - t - 1), t \in \mathbb{R}$$

e

$$\sigma(u) = (\,\text{sen}u,\ \cos u,\ \cos u - \cos^3 u - \text{sen}u), u \in [0, 2\pi]$$

estão contidas no gráfico de f. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1, 0))$.

$\gamma(0) = (1,0,-1)$ e $\sigma(\pi/2) = (1,0,-1)$; $f(1,0) = -1$

Como $Im(\gamma)$ e $Im(\sigma)$ estão contidas no gráfico da função diferenciável f, sabemos que $\gamma'(0)$ e $\sigma'(\pi/2)$ são vetores paralelos ao plano tangente ao gráfico de f em $(1,0,-1)$. Como $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), -1\right) = \vec{n}$ é um vetor normal a esse plano, temos:

$\vec{n} \cdot \gamma'(0) = 0$ e $\vec{n} \cdot \sigma'(\pi/2) = 0$. $\quad (*)$

Por outro lado,

$\gamma'(t) = (1, 2t, 4t^3 + 6t^2 + 2t - 1) \Rightarrow \gamma'(0) = (1, 0, -1)$

$\sigma'(u) = (\cos u, -\text{sen}u, -\text{sen}u + 3\cos^2 u\, \text{sen}u - \cos u) \Rightarrow$

$\sigma'(\pi/2) = (0, -1, -1)$

De $(*)$ temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 1 = 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 \end{array}$$

O plano pedido tem equação:

$-1(x-1) + 1(y-0) - 1(z+1) = 0$, ou seja,

$$x - y + z = 0$$