3. **(2,5)** Seja π o plano tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Seja $\gamma(t) = (t, 1 + \frac{1}{t}), t \neq 0$ uma parametrização para a curva de nível 1 de f e suponha que $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ para algum t_0. Determine uma equação para o plano π sabendo que ele contém os pontos $(1, 1, \frac{1}{2})$ e $(1, 4, 2)$.

Como $f(\gamma(t)) = 1$, $\forall t \neq 0$, temos: $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ $\forall t \neq 0$

Para $t = t_0$, $\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (1, -1/t_0^2) = 0$.

Logo, o vetor $\nabla f(\gamma(t_0))$ é da forma $\lambda(1/t_0^2, 1)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Neste caso,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0)) = \lambda / t_0^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0)) = \lambda$$

e a equação do plano π é:

$$\frac{\lambda}{t_0^2}(x - t_0) + \lambda(y - 1 - 1/t_0) - 1(z - 1) = 0 \quad (*)$$

Substituindo (x, y, z) por $(1, 1, 1/2)$ e por $(1, 4, 2)$ obtemos duas equações:

(I) $\lambda/t_0^2 (1 - t_0) + \lambda(-1/t_0) + 1/2 = 0$

(II) $\lambda/t_0^2 (1 - t_0) + \lambda(3 - 1/t_0) - 1 = 0$

Fazendo (I) - (II) obtemos $-3\lambda + 3/2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$

Substituindo $\lambda = 1/2$ em (I), obtemos: $t_0 = 1$

Substituindo em $(*)$ obtemos a equação do plano:

$$x + y - 2z - 1 = 0$$