3. **(2,5)** Seja π o plano tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Seja $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{t}, t), t \neq 0$ uma parametrização para a curva de nível 1 de f e suponha que $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ para algum t_0. Determine uma equação para o plano π sabendo que ele contém os pontos $(1, 1, \frac{1}{2})$ e $(4, 1, 2)$.

Como $f(\gamma(t)) = 1,\ \forall t \neq 0$, temos:

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$$

Para $t = t_0$: $\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (-1/t_0^2, 1) = 0$

Logo, $\nabla f(\gamma(t_0))$ é da forma $\lambda(1, 1/t_0^2)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Neste caso, $\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0)) = \lambda$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0)) = \lambda/t_0^2$ e a equação do plano π é:

$$\lambda(x - (1 + 1/t_0)) + \lambda/t_0^2 (y - t_0) + (-1)(z - 1) = 0 \quad (*)$$

Substituindo (x, y, z) por $(1, 1, 1/2)$ e por $(4, 1, 2)$ obtemos duas equações:

(I) $\lambda(-1/t_0) + \lambda/t_0^2 (1 - t_0) + 1/2 = 0$

(II) $\lambda(3 - 1/t_0) + \lambda/t_0^2 (1 - t_0) - 1 = 0$

Fazendo (I) − (II) obtemos $-3\lambda + 3/2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1/2}$

Substituindo $\lambda = 1/2$ em (I) obtemos $\boxed{t_0 = 1}$

Substituindo $\lambda = 1/2$ e $t_0 = 1$ na equação do plano $(*)$ obtemos a equação pedida:

$$x + y - 2z - 1 = 0$$