**Prova 2 – 14/10/2013 – Turma B**

**Questão 2.** (3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, uma função de classe $C^2$ e defina

$$g(u, v) = f(2u^2v, u^2 - v^3).$$

a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em termos da função $f$ e de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

b) Se $4x + 2y + 3z = 4$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2, 0, f(2, 0))$, determine $f(2, 0)$, $\nabla f(2, 0)$ e $g(1, 1)$.

c) Sabendo que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 0) = 4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 0) = 2$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 0) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1)$.

**Solução** Primeiramente, observamos que $g$ é uma função de classe $C^2$, ja que é composta de $f$, que é de classe $C^2$, com as funções $x = 2u^2v$ e $y = u^2 - v^3$, que são de classe $C^\infty$ em $(u, v)$. Dessa forma, as derivadas mistas de $f$ e as derivadas mistas de $g$ são iguais (Teorema de Schwartz).

**(a)** Usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 2u^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot (-3v^2)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) \quad &= \frac{\partial f}{\partial x}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 4u \\
&+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 4uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 2u\right] \cdot 2u^2 \\
&+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 4uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 2u\right] \cdot (-3v^2).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) \quad &= 4u\frac{\partial f}{\partial x}(2u^2v, u^2 - v^3) + 8u^3v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2u^2v, u^2 - v^3) \\
&+ (4u^3 - 12uv^3)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2u^2v, u^2 - v^3) - 6uv^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u^2v, u^2 - v^3).
\end{aligned}$$

**(b)** Como $z = f(2, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0)(y - 0)$ e $z = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$ são duas equações para o mesmo plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2, 0, f(2, 0))$, identificando coeficientes, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = -\frac{4}{3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = -\frac{2}{3} \text{ e } f(2, 0) = -\frac{4}{3}.$$

Logo, $f(2, 0) = -\frac{4}{3}$, $\nabla f(2, 0) = -\frac{2}{3}(2\vec{i} + \vec{j})$ e $g(1, 1) = f(2, 0) = -\frac{4}{3}$.

**(c)** Quando $(u, v) = (1, 1)$, temos $(x, y) = (2, 0)$ e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1, 1) \quad &= 4\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) + 8\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 0) - 8\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 0) - 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 0) \\
&= 4 \times (-\frac{4}{3}) + 8 \times 4 - 8 \times (-1) - 6 \times 2 = -\frac{16}{3} + 28 = \frac{68}{3}.
\end{aligned}$$