1. **(3,0)** Seja $f(x,y) = xe^{\sqrt[3]{x^2+y^4}}$.

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ explicitando o seu domínio. A função $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$?

   (b) Determine o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais f é diferenciável. **Justifique !**

(a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} + xe^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \cdot \dfrac{1 \cdot 2x}{3(x^2+y^4)^{2/3}}$

Verificar se existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\cancel{x}} = 1$$

Logo
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} + \frac{2}{3} e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}}$$

Portanto o domínio de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é $\mathbb{R}^2$.

Para verificar se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$ temos que ver se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}}\right) \quad (*)$$

(*) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{\underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^4}\right)^2}_{\text{limitada } (**)}} = 0$$

Temos que

(**) $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^4} \leq 1 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$ e assim, $0 \leq \left(\dfrac{x^2}{x^2+y^4}\right)^2 \leq 1$

Logo
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\overbrace{\sqrt[3]{x^2+y^4}}^{\to 0}} \left(1 + \frac{2}{3} \overbrace{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}}}^{\to 0 \text{ (por (*))}}\right) = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

A função $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é então contínua em $(0,0)$.

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \cdot \frac{1}{3}(x^2+y^4)^{-2/3} \cdot 4y^3$ se $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{x y^3}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}} e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Logo f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Em $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$

e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Seja $E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$

$$= x e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} - x$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\left(e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} - 1\right)}{\sqrt{x^2+y^4}} = 0$$

$\to 0$

limitada

Logo f é diferenciável em $(0,0)$.

Assim, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Outra solução na prova (B).