

Questão 4. Calcule, caso exista. Se não existir, explique por quê.

a) (1,5) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(4x^2 + 3y^2) \ln(x^2 + y^2)}{4x^2 + 3y^2}$

b) (1,0) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^6 - y^4}$

a) 1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(4x^2 + 3y^2)}{4x^2 + 3y^2} = 1$ pois $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$

e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (4x^2 + 3y^2) = 0$

2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = 0$ pois

$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{1/t} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t) = 0$

3) $0 \leq \frac{4x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{4(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$

De 2) e 3) segue que $0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{4x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}}_{\text{limitada}} \underbrace{(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)}_{\downarrow 0}$

Logo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(4x^2 + 3y^2)}{4x^2 + 3y^2} \underbrace{\left(\frac{4x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)}_{\downarrow 0} = 0$.

Portanto

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \text{sen}(4x^2 + 3y^2) \ln(x^2 + y^2) = 0$