Questão 2. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{3+2x-3y^2}}$ e seja $\mathcal{C}$ a curva de nível de f que passa pelo ponto $(3,0)$.

a) Usando o sistema de coordenadas abaixo:

i) (0,5) represente geometricamente o domínio de f;

$3+2x-3y^2 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}\}$

Ou seja, o domínio de f é a região interna da parábola $x = \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}$

ii) (1,0) faça um esboço da curva $\mathcal{C}$.

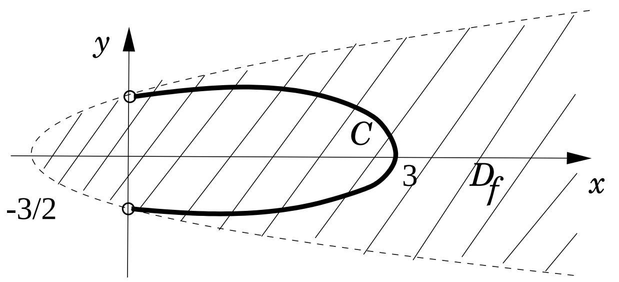
Seja $k \in Im_f$ e considere $\dfrac{x}{\sqrt{3+2x-3y^2}} = k$.

Como $(3,0) \in \mathcal{C}$, então $k = f(3,0) = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$.

$x = \sqrt{3+2x-3y^2}$ (observe que $x > 0$)

$x^2 = 3+2x-3y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + 3y^3 = 4 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 = 1$

Ou seja, a curva $\mathcal{C}$ é parte da elipse $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 = 1$, na qual $x > 0$. $(*)$



b) (1,0) Determine uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$, isto é, encontre um intervalo I e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ contínua cuja imagem é $\mathcal{C}$.

Utilizando a relação fundamental da trigonometria em $(*)$, segue que uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$ é dada por

$$\gamma(t) = (1 + 2\cos t, \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\,\text{t}), \text{ com } 1 + 2\cos \text{t} > 0$$

Portanto, $\cos t > -\frac{1}{2}$, ou seja, $t \in I =]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

c) (0,5) Decida se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Considere a curva $\gamma_1(t) = (t,1)$, com $t > 0$, e a curva γ como no item (b).

Temos que

(a) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{3+2t-3}} = 0$

(b) $\lim\limits_{t\to \frac{2\pi}{3}} f(\gamma(t)) = \lim\limits_{t\to \frac{2\pi}{3}} 1 = 1$ (γ é a curva de nível 1 de f e $\gamma(t) \to (0,1)$, quando $t \to \frac{2\pi}{3}$)

Portanto, NÃO existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.