MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

$3^{\underline{a}}$ lista de exercícios - 2013

1. Em cada caso, esboce a superfície de nível c da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:
   a) $F(x,y,z) = x + 2y + 3z$ e $c = 1$ b) $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ e $c = 1$
   c) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 0$ d) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = -1$
   e) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 1$ f) $F(x,y,z) = x^2 - y^2$ e $c = 1$
   g) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ e $c = 1$

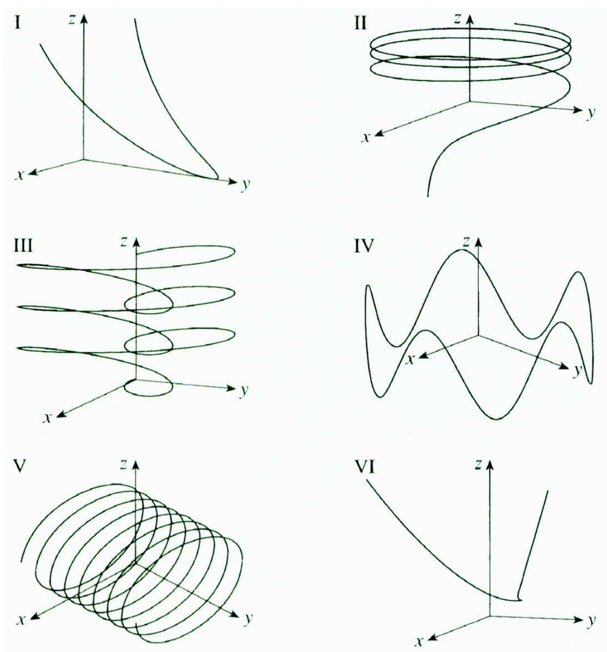
   Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

2. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, \pi]$, está contida numa esfera com centro em $(0,0,0)$ e esboce a imagem de γ.

3. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{sen}\, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

4. a) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
   b) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção da superfície $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$ com o plano $y = 2z + 1$.
   c) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do cone $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$ com o plano $z = 2x + 1$.

5. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:
   a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \mathrm{sen}\, 4t)$ b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$
   c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ d) $\gamma(t) = (\mathrm{sen}\, 3t \cos t, \mathrm{sen}\, 3t\, \mathrm{sen}\, t, t)$
   e)$\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, \ln t)$ f) $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, \mathrm{sen}\, 5t)$



6. **Resolva a última questão da Prova P1 de cada um dos seguintes anos: 2008, 2009 e 2010**

7. Encontre uma parametrização para C e a reta tangente a C no ponto P:

   a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$ e $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

   b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z \text{ e } x = z\}$ e $P = (1,0,1)$.

8. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ nos quais a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3,-1,0)$ e $(5,3,6)$.

9. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1,1,2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

10. Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $z = x^2 + y^2$ no ponto $(-1,1,2)$.

11. Ache a reta tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com gráfico de $f(x,y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1,1,4)$.

12. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1,0) = (2,1)$ e $\gamma'(t) \neq (0,0,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1,0,-1) \in Im\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

13. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    a) $f(x,y,z) = xe^z + \text{sen}\,(y),\ (2,0,0)$ b) $f(x,y,z) = -\dfrac{4}{y} + z\ln(x),\ (1,2,-1)$

14. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

    a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3,4,5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

    b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?

    c) Qual é a maior taxa de variação em P?

15. Encontre uma parametrização para C, esboce C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos:

    a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x,y) = x^3 y$.

    b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x,y,z) = x - z$.

    c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ e $f(x,y,z) = xz + y$.

d) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1 \text{ e } x-y+3z=3\}$ e $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

16. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D.)

    a) $f(x,y) = 5-3x+4y$; D é o triângulo (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,5)$

    b) $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 2,\, x \leq 0,\; y \geq 0\}$

    c) $f(x,y) = 2x^3+y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1\}$

17. Seja $T(x,y) = \dfrac{4}{x^2+y^2}$ uma função que dá a temperatura do ponto (x,y) do plano. Em que ponto da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq -x+1\}$ a temperatura máxima é atingida? E a mínima? Justifique.

18. Encontre o máximo e o mínimo absolutos de $f(x,y)$ em D sendo:

    a) $f(x,y) = xy$; $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2-y^2=1,\; x \in [1,2]\big\}$

    b) $f(x,y) = 2x^3+y^4$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2=1,\; x \in [0,\frac{1}{4}],\, y \geq 0\}$

    Você pode usar multiplicadores de Lagrange (apenas) para resolver esse exercício?

19. Determine o valor máximo e o valor mínimo de f em R sendo

    a) $f(x,y,z) = x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z$ e $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 56\}$

    b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-4xy-4z+3x$ e
    $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 4\}$

20. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função f sujeita às restrições explicitadas:

    a) $f(x,y) = xy$; $5x^2+5y^2+6xy-64=0$

    b) $f(x,y,z) = xyz$; $x^2+2y^2+3z^2=6$

    c) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$; $x^2+y^2+z^2=1$

    d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$; $x^4+y^4+z^4=1$

21. Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em C, sem parametrizar C:

    a) $f(x,y,z) = x+y+z$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \text{ e } 4x+4y=z^2\}$;

    b) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ e
    $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1 \text{ e } x+y+z=1\}$;

    c) f e C como no exercício 15 (a);

    d) f e C como no exercício 15 (b).

22. Encontre o máximo e o mínimo de $f(x,y,z) = 2x + y - z^2$ no compacto C.

   a) C é a intersecção de S com o plano $2z = 2x + y + 4$, onde S a parte do hiperbolóide $4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$, com $z > 0$.

   b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, z > 0 \text{ e } 2z \leq 2x + y + 4\}$.

23. Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z$. Achar o máximo e o mínimo de f em:

   a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$

   b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$

   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq \frac{1}{2}\}$

   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ e } z \geq x + y\}$

Nos exercícios 24 a 28 prove que o problema tem solução, isto é, explique por que o ponto encontrado é, de fato, de máximo ou de mínimo.

24. a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0,0)$.

   b) Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1,1,1)$? (Para justificar, veja, por exemplo, o exercício 33).

25. Determine o maior produto de 3 números reais positivos cuja soma é 100. Exiba tais números.

26. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor máximo de $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma$.

27. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, inscrito no elipsóide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

28. Determine as dimensões do paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2, z > 0$.

29. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$	b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$
c) $z = x^2y^2$	d) $z = x^3y^3$
e) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$	f) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$
g) $z = xye^{-x^2-y^2}$	h) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$

30. Determine os valores de a para os quais a função

$$f(x,y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$$

a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;
b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.
c) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?
d) Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

31. É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. Por quê? O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

32. Mostre que a função $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

33. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes não todas nulas. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f, então será um extremante global de f. (*Dica:* dados $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, observe que a função $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola).

Resolva os exercícios 34 a 38, a seguir, assumindo que cada problema proposto tem solução. É possível provar que essas soluções existem. Tente fazê-lo.

34. Um pentágono de 12 cm de perímetro é construído colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo. Dentre esses pentágonos, determine as medidas dos lados daquele que tem área máxima.

35. Determine a equação do plano que passa por $(2,2,1)$ e que delimita no primeiro octante o tetraedro de menor volume.

36. Dentre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$ encontre aqueles mais distantes da origem.

37. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construída com 27cm^2 de papelão.

38. Um quarto de armazenamento aquecido tem a forma de uma caixa retangular e tem o volume de 1000 pés cúbicos. Como o ar quente sobre, a perda de calor por unidade de área pelo teto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto que minimiza a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.

39. (**Método dos Mínimos Quadrados**) Sejam $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq n$ (dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), com $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$. Estes pontos representam os resultados de algum experimento, e gostaríamos de encontrar uma função linear afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ a serem determinados, tal que o gráfico de f contenha P_i para $1 \leq i \leq n$. Nem sempre existe uma tal função; com efeito, o sistema linear nas variáveis a e b dado por $ax_i + b = y_i$, $1 \leq i \leq n$, é, em geral, impossível se $n \geq 3$. O objetivo deste exercício é verificar que é possível encontrar uma solução aproximada deste sistema, i.e. que minimiza a soma dos quadrados dos erros $E(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2$. Mostre que $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ assim definida tem um único ponto de mínimo global e encontre tal ponto.

RESPOSTAS

1. Apenas a superfície do item (a).

4. a) $\gamma(t) : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\cos(2t))$
b) $\gamma(t) : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t - 1, \operatorname{sen} t - 1)$
c) $\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\frac{1}{4}(t^2 - 1), t, \frac{1}{2}(t^2 + 1))$

7. a) $\gamma(t) : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\frac{1}{2}(-1 + \cos t), \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t, \frac{1}{2}(1 + \cos t))$,
reta tangente: $X = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) + \lambda(-1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
b) $\gamma(t) : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 1 + \cos t)$,
reta tangente: $X = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$

8. $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

10. $(5, 8, 6)$.

11. $X = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.

12. $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5), \lambda \in \mathbb{R}$.

13. a) $\sqrt{6}$; $(1, 1, 2)$ b) $\sqrt{2}$; $(-1, 1, 0)$.

14. a) $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ b) $(38, 6, 12)$ c) $2\sqrt{406}$.

15. a) pontos de máximo: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}})$; pontos de mínimo: $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2\sqrt{2}})$.
b) ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}})$; ponto de mínimo: $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}})$.
c) ponto de máximo: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$; ponto de mínimo: $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.
d) ponto de mínimo: $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{5}{6})$; não tem ponto de máximo.

16. a) máximo: $f(4,5) = 13$, mínimo: $f(4,0) = -7$;
b) máximo: $f(0,0) = 0$, mínimo: $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\dfrac{1}{2e}$;
c) máximo: $f(1,0) = 2$, mínimo: $f(-1,0) = -2$;

17. ponto de máximo $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; não há ponto de mínimo.

18. a) mínimo: $-2\sqrt{3}$ e máximo $2\sqrt{3}$; b) mínimo: $\frac{1}{32} + \left(\frac{15}{16}\right)^2$ e máximo 1.

19. a) Valor mínimo: -14, Ponto de mínimo $(1,2,3)$;
Valor máximo 112, Ponto de máximo $(-2,-4,-6)$
b) Valor mínimo: $-\frac{11}{4}$, Ponto de mínimo $(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2})$;
Valor máximo 28, Ponto de máximo $(4,0,0)$

20. a) máx $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$; mín $f(4,-4) = f(-4,4) = -16$; b) máx $\frac{2}{\sqrt{3}}$, mín $-\frac{2}{\sqrt{3}}$; c) máx $\frac{1}{27}$, mín 0; d) máx $\sqrt{3}$, mín 1.

21. a) pontos de mínimo: $(0,1,-2)$ e $(1,0,-2)$; ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt[4]{2})$.
b) pontos de mínimo: $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, e $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; pontos de máximo: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$.
c) pontos de mínimo: $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; ponto de máximo: $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.
d) pontos de mínimo: $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$; ponto de máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

22. a) Ponto mínimo: $(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7})$, valor mínimo: $-19 - 6\sqrt{7}$
Ponto de máximo: $(1 - \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 - \sqrt{7}, 4 - \sqrt{7})$, valor máximo: $-19 + 6\sqrt{7}$
b) Ponto de mínimo: $(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}, 2 + \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7})$, valor mínimo: $-19 - 6\sqrt{7}$
Ponto de máximo: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, valor máximo: $-\frac{1}{2}$

23. a) Ponto de máximo: $(0,0,-2)$, pontos de mínimo $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.
b) Os mesmos que em (a).
c) Pontos de máximo: $(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$;
pontos de mínimo: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ e $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.
d) Os mesmos que em (c).
e) Pontos de máximo: $(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3})$ e $(-\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{2}{3})$;
pontos de mínimo: $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

24. a) $(1,1)$ e $(-1,-1)$; b) $(0,-1,2)$.

25. $n_1 = n_2 = n_3 = \dfrac{100}{3}$.

26. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

27. O paralelepípedo tem vértices em $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{3}\right)$.

28. O paralelepípedo tem vértices em $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, \pm 1, 2)$.

29. a) $(-3, 2)$ mínimo;
b) $(\frac{2}{3}, 1)$, $(-\frac{4}{3}, -1)$ selas;
c) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos;
d) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas;
e) $(1, 1)$ máximo, $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$ selas;
f) $(0, 0)$ máximo, $(0, 2)$ mínimo, $(0, -2), (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1)$ selas;
g) $(0, 0)$ sela, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ máximos, $\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mínimos;
h) $(\frac{1}{3}, 0)$ mínimo;

30. a) $a > 0$ b) $a < 0$ c) não d) $a = 0$.

34. $12(2 - \sqrt{3}),\ 2(3 - \sqrt{3}),\ 4(2\sqrt{3} - 3)$

35. $x + y + 2z - 6 = 0$

36. $2^{2/5}x + 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5;\ \ 2^{2/5}x - 2^{9/10}y + 2^{9/10}z = 5;$
$2^{2/5}x + 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5;\ \ 2^{2/5}x - 2^{9/10}y - 2^{9/10}z = 5.$

37. base 3×3cm, altura 1,5cm.

38. largura, profundidade e altura iguais a 10 pés.