MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

2ª Lista de Exercícios - 2013

1. Seja $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4}$ e seja $\gamma(t) = (t\cos t, t\,\mathrm{sen}\, t, \sqrt{t^2+4}),\ t \geq 0$.

   (a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

   (b) Faça um esboço da imagem de γ.

2. Sejam $g(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$ e $\gamma(t) = (2-t, 3+t, z(t)), t \in \mathbb{R}$.

   Sabendo que a imagem de γ está contida no gráfico de g, determine $z(t)$. Determine uma equação para a reta tangente à imagem de γ no ponto $(1,4,3)$. Esboce a imagem de γ.

3. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$. Seja $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (\mathrm{sen}\, t, \cos t, z(t))$. Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de f, determine o vetor tangente à imagem de γ em $\gamma(\frac{\pi}{3})$.

4. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções:
   (a) $f(x,y) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

5. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, e^{\mathrm{sen}\,(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

   Sugestão: Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

6. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

7. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2ª ordem.

   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

   (b) f é contínua em (0,0)?

   (c) f é diferenciável em (0,0)?

9. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) É f diferenciável em $(0,0)$?

   (d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

10. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

   (b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\text{sen}\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

   (b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

   (d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

12. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

   (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

13. Seja $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$. Mostre que f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

14. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável, sendo:

    (a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b) $f(x,y) = x|y|$

    (c) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^4+y^4}}$ (d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

15. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

    (a) $z = e^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$ (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$

    (c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$ (d) $z = e^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$

16. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe mesmo só um?

17. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3y$.

18. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2+ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x+z=0$.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

20. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por: $\nabla f(x,y) = (x^2y, y^2), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

21. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

    (a) $w = x^2+y^2; x = t^2+u^2, y = 2tu$.

    (b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2};\ x = t\cos u,\ y = t\,\mathrm{sen}\,u$.

22. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x+3$.

23. Seja $v(r,s)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $u(x,t) = v(x+ct, x-ct)$, onde c é constante.

(a) Verifique que

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = w(x+ct, x-ct),$$

onde $w(r,s) = -4c^2 v_{rs}(r,s)$.

(b) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ então existem funções F e G de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).[*]$$

[***Observação:** O item (b) deste exercício foge do contexto desta lista, mas foi introduzido para completar o enunciado do resultado. Entretanto você pode resolver o item (b) com o conhecimento de cálculo que você tem! Reveja também o Exercício 7(a).]

24. Seja $u = u(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

sendo Δu, por definição, dado por $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

25. Seja $f = f(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s,t) = f(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\,\mathrm{sen}\,t)$, mostre que

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t)\right]^2 = \mathrm{e}^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\right)^2\right]$$

e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t) = \mathrm{e}^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t)\right].$$

26. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$$

(a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de f.

(b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de f, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

27. Seja $F(r,s) = G(e^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

   (b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

28. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

29. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

30. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Fixado um certo $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto P:

   (a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$;   (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$;   (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

31. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0, 2, f(0,2)\big)$. Seja

$$g(u,v) = u\, f\big(\mathrm{sen}\,(u^2 - v^3), 2u^2 v\big).$$

   Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1, 1, g(1,1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

32. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2,1)$.

33. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ em um ponto $P = \gamma(t_0)$ com $t_0 > 0$. Considere a curva de nível de f que contém P. Encontre a equação da reta tangente a essa curva no ponto P.

34. Sabe-se que a curva $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t^2 + t)$ é uma curva de nível da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $f(\gamma(t)) = 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Admita que existem 2 pontos $(x_0, y_0) \in \mathrm{Im}\gamma$ com a propriedade de que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, 2)$ é paralelo ao plano $x + y - z = 0$. Encontre esses 2 pontos.

35. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

(a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, $(1,0)$; (b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(1,2)$;

36. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os pontos $A(1,3)$, $B(3,4)$, $C(2,4)$ e $D(6,15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AB}/||\overrightarrow{AB}||$ é $3\sqrt{5}$ e que a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AC}/||\overrightarrow{AC}||$ é $\sqrt{8}$. Encontre o vetor gradiente $\nabla f(1,3)$ e a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AD}/||\overrightarrow{AD}||$.

37. Mostre que $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$ é contínua em $(0,0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$. É f diferenciável em $(0,0)$?

38. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3/5, 4/5)$.

39. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

(b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.

(c) Seja $\vec{u} = (m, n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(d) É f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

40. Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de ambas curvas $\gamma(t) = \left(-\dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}\right)$ e $\sigma(u) = \left(u+1, u, u+2+\dfrac{1}{u}\right)$, $u \neq 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

41. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Mostre que existem as derivadas direcionais de f em todas as direções no ponto $(0,0)$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle$ para todo vetor unitário $\vec{u}$. É f diferenciável em $(0,0)$?

42. A curva de nível 1 da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (t, 2t^2), t \in \mathbb{R}$. A curva $\sigma(u) = (-u, u^3, u^6 - u^5 - 2u^4 + 1), u \in \mathbb{R}$ tem sua imagem contida no gráfico de f.

(a) Determine o vetor tangente à curva σ no ponto $(-2, 8, 1)$.

(b) Determine o vetor tangente à curva γ no ponto $(-2, 8)$.

(c) Calcule o gradiente de f em $(-2, 8)$.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

Para resolver o exercício a seguir você vai precisar da Regra da Cadeia, do Teorema Fundamental do Cálculo e do seguinte resultado:

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e defina a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\Phi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$. Então a função Φ é derivável e vale que $\Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

1. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$$

sendo $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Mostre que

$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f\big(x, b(x)\big)\, b'(x) - f\big(x, a(x)\big)\, a'(x)$$

2. Calcule $F'(x)$ para:

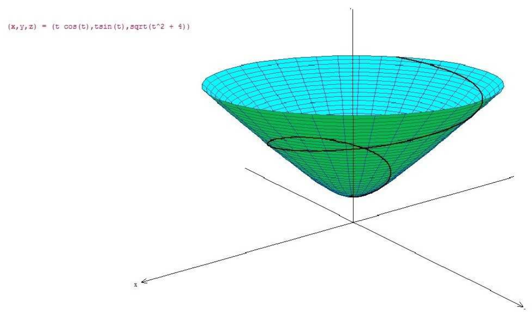
(a) $F(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2 - t^2}{2}}\,dt$

(b) $F(x) = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + t^2}\,dt$

(c) $F(x) = \int_{\cos x}^{\cosh x} \operatorname{sen}(x^2 t^2)\,dt$

RESPOSTAS

1.



2. $z(t) = 2t^2 + 1$; $X = (1,4,3) + \lambda(-1,1,4), \lambda \in \mathbb{R}$.

3. $\gamma'(\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

4. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

5. -2 8. (b) Não é contínua em (0,0). (c) Não é diferenciável em (0,0).

9. (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. (c) Não.

(d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$. 10. (b) Não

11. (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\,\mathrm{sen}\,((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) Sim. (d) Sim.

14. (a) f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.

(b) f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$.

(c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. (d) O mesmo que o item (c).

15. (a) $z = 1; X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.
(b) $2x + y - z - 1 = 0; X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.
(c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.
(d) $e^3y - z - e^3 = 0; X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

16. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um) 17. $6x - y - z + 6 = 0$ 18. $k = 8$

22. $a = 3$ 26. (b) 21

27.(a) $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s\cos s\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4\cos^2 s\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs}\frac{\partial G}{\partial x} + 6r\cos s\frac{\partial G}{\partial y}$; (b) 0.

28. $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$. 29. $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5,-4), \lambda \in \mathbb{R}$.

30. (c) 31. $a = -4$ 32. $(1,4)$ 33. $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

34. $(2,-1)$ e $(10/9, -7/27)$. 35. (a) $\sqrt{5},\ (1,2)$; (b) $\frac{2}{\sqrt{5}},\ \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

36. $\nabla f(1,3) = (11,-7)$ e a derivada direcional pedida é $-29/13$.

37. f não é diferenciável em $(0,0)$. 38. $4/5$ 39. (d) Não é. 40. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

41. f não é diferenciável em $(0,0)$ 42.(c) $\nabla f(-2,8) = (96,12)$