4. **(3,0)** Encontre os pontos de máximo e de mínimo de $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + 3y^2 + z^3$ em

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } \underbrace{x - y + z = 2}_{R_1} \text{ e } \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 2}_{R_2}\}.$$

Sejam $g(x,y,z) = x - y + z$ e $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$\nabla g = (1,-1,1)$ e $\nabla h = (2x, 2y, 2z)$.

$\nabla g \,//\, \nabla h \iff x = -y$ e $x = z$. Em R_1 ocorre apenas em $(2/3, -2/3, 2/3)$ que não pertence a R_2. Logo não são // em C. Assim os ptos de máximo e de mínimo de f em C satisfazem:

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2+6y & 3z^2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff z\cdot(y^2+2y) - z^2y + x^2z - xz^2 + x^2y - x\cdot(y^2+2y) = 0$$

$$\iff yz\underbrace{(y+2-z)}_{=x\ (R_1)} + x\cdot z(x-z) + xy\underbrace{(x-y-2)}_{-z\ (R_1)} = 0$$

$$\iff xyz + xz(x-z) - xyz = 0 \iff xz\cdot(x-z) = 0$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } z = 0 \text{ ou } x = z$$

Se $x = 0$:

$$\begin{cases} -y + z = 2 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + (2+y)^2 = 2 \iff 2\cdot(y+1)^2 = 0 \iff y = -1$$

$$\boxed{P_1 = (0,-1,1)}$$

Se $z = 0$: analogamente temos $\boxed{(1,-1,0) = P_2}$

$\longrightarrow$

Se $x = z$:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + (2x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 1/3$$

$\boxed{P_3 = (1, 0, 1)}$ e $\boxed{P_4 = (1/3, -4/3, 1/3)}$

$f(P_1) = f(P_2) = 3$

$f(P_3) = 2$ e $f(P_4) = \dfrac{82}{27} > 3$

$\therefore$ Valor máx: $82/27$ (ocorre em P_4)

Valor mín: 2 (ocorre em P_3)