4. **(3,0)** Encontre os pontos de máximo e de mínimo de $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3z^2$ em

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tais que } \underbrace{x + y - z = 2}_{R_1} \text{ e } \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 2}_{R_2}\}.$$

Sejam $g(x,y,z) = x+y-z$ e $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$\nabla g = (1,1,-1)$ e $\nabla h = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla g // \nabla h \iff x = y$ e $z = -x$. Em R_1 ocorre apenas em $(2/3, 2/3, -2/3)$ que não pertence a R_2. Logo não são // em C. Assim os ptos de máximo e de mínimo de f em C são ptos de C que satisfazem:

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2+6z \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff y^2z - y(z^2+2z) + x(z^2+2z) - x^2z + xy^2 - x^2y = 0$$

$$\iff yz(\underbrace{y-z-2}_{=-x\,(R_1)}) + xz(\underbrace{z+2-x}_{=y\,(R_1)}) + xy(y-x) = 0$$

$$\iff -xyz + xyz + xy(y-x) = 0$$

$$\iff xy(y-x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } x = y$$

<u>se $x = 0$:</u>

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + (y-2)^2 = 2 \iff 2(y-1)^2 = 0 \iff y = 1$$

$$\boxed{P_1 = (0,1,-1)}$$

<u>se $y = 0$:</u> Analogamente temos $\boxed{P_2 = (1,0,-1)}$

$\Longrightarrow$

Se $x=y$:

$$\begin{cases} 2x-z=2 \\ 2x^2+z^2=2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2+(2x-2)^2=2 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x_1=1 \text{ e } x_2=1/3$$

$P_3=(1,1,0)$ e $P_4=(1/3, 1/3, -4/3)$

$f(P_1)=f(P_2)=3$

$f(P_3)=2$ e $f(P_4)=\frac{82}{27}>3$

$\therefore$ Valor máx: $82/27$ (ocorre em P_4)

Valor mín: 2 (ocorre em P_3)