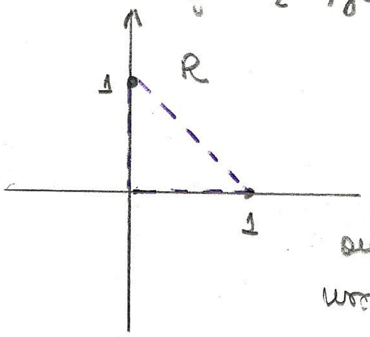
3. **(3,0)** Seja p um número real com $0 < p < 1$. Mostre que para quaisquer números reais x, y e z com $x > 0, y > 0, z > 0$ e $x + y + z = 1$, tem-se que $3^{1-p} \geq x^p + y^p + z^p > 1$. **JUSTIFIQUE!**

Temos que $x + y + z = 1$. Logo $z = 1 - x - y$.

Vamos então estudar a função $f(x,y) = x^p + y^p + (1-x-y)^p$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$



A função f é diferenciável em R e R é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Logo, se existir em R um ponto de máximo ou de mínimo de f, ele tem que ser um ponto (x_0, y_0) com $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

$$\nabla f(x,y) = \left(p x^{p-1} - p(1-x-y)^{p-1},\ p y^{p-1} - p(1-x-y)^{p-1}\right)$$

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow p x^{p-1} - p(1-x-y)^{p-1} = 0 \text{ e }$$
$$p y^{p-1} - p(1-x-y)^{p-1} = 0.$$

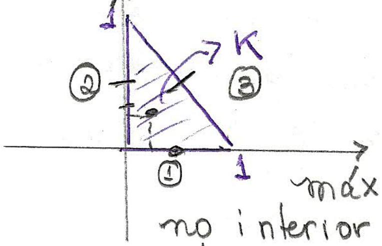
Logo $p x^{p-1} = p y^{p-1} \Rightarrow x = y$.

Assim, $p x^{p-1} = p(1-2x)^{p-1} \Rightarrow x^{p-1} = (1-2x)^{p-1}$

$\Rightarrow x = 1 - 2x \Rightarrow x = 1/3$.

Logo o único ponto crítico de f em R é $(1/3, 1/3)$.

Não sabemos se esse ponto é de máximo, mínimo ou sela. Nem se f tem máximo e mínimo em R, já que R não é um conjunto compacto. R é limitado mas não é fechado. Vamos então considerar $K = R \cup \mathrm{fr}\, R$. Agora K é compacto, $f: K \to \mathbb{R}$ é contínua, portanto, f tem máximo e mínimo em K (pelo Teorema de Weierstrass). Os candidatos a pontos de máx e mín de f em K são os ptos críticos de f no interior de $K = R$ e os ptos de máximo e mínimo de f na fronteira de $K = \mathrm{fr}\, R$.



$\mathrm{fr}\, K = \mathrm{fr}\, R = \{(x,0) \text{ tais que } 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y) \text{ tais que } 0 \leq y \leq 1\} \cup$
$\cup \{(x,y) \text{ tais que } x + y = 1 \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}$

① Em $\{(x,0) \text{ tais que } 0 \leq x \leq 1\}$

$g_1(x) = f(x,0) = x^p + (1-x)^p$, $x \in [0,1]$.

Como g_1 é contínua e $[0,1]$ é fechado, f tem máx e mínimo em $[0,1]$. Os candidatos são: $x = 0$, $x = 1$ e os pontos críticos de g_1 em $]0,1[$, Como g_1 é derivável em $]0,1[$, vamos ver em que pontos $g_1'(x) = 0$.

$g_1'(x) = p\,x^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = 0 \implies$

$x = 1-x \implies x = 1/2$

Nesse trecho da fronteira, os candidatos são:

$(0,0)$, $(1/2, 0)$, $(1, 0)$.

Analogamente em ② $g_2(y) = f(0,y) = y^p + (1-y)^{p-1}$, $y \in [0,1]$.

Os candidatos são $(0,0)$, $(0, 1/2)$, $(0, 1)$.

Em (3) $x + y = 1$ e $x \in [0,1]$

$g_3(x) = f(x, 1-x) = x^p + (1-x)^p$

Os candidatos são $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1/2, 1/2)$.

candidato (x_0, y_0)	$f(x_0, y_0)$
$(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$	1
$(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$	$\frac{2}{2^p} = 2^{1-p}$
$(1/3, 1/3)$	$3/3^p = 3^{1-p}$

Como $0 < p < 1 \implies 0 < 1-p < 1$ e assim $1 < 2^{1-p} < 3^{1-p}$.

1 é o valor mínimo de f em K

3^{1-p} é o valor máximo de f em K

Assim, para todo $(x,y) \in K$, $1 \leq f(x,y) \leq 3^{1-p}$.

Mas temos que estudar f em R. Em R já temos que $1 \leq f(x,y) \leq 3^{1-p}$. Mostrar que $f(x,y) > 1$ para todo $(x,y) \in R$. Se existisse $(x_0, y_0) \in R$ com $f(x_0, y_0) = 1$ então (x_0, y_0) seria um ponto de mínimo de f em R. Como R é aberto, ele seria um ponto crítico de f. Mas o único ponto crítico de f em R é $(1/3, 1/3)$.

Logo temos $1 < f(x,y) \leq 3^{1-p}$ $\forall (x,y) \in R$.

Assim $1 < x^p + y^p + (1-x-y)^p \leq 3^{1-p}$ $\forall (x,y) \in R$.

Como $z = 1-x-y$ temos

$1 < x^p + y^p + z^p \leq 3^{1-p}$ $\forall x > 0, y > 0$ e $z > 0$