Q3 - USANDO LAGRANGE

Seja $K=\{(x,y,z): x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$. Seja $f(x,y,z)=x^p+y^p+z^p$. Como K é compacto e f é contínua em K, pelo teorema de Weierstrass, f assume máximo e mínimo em K. Seja (x,y,z) um ponto de máximo ou de mínimo de f em K

1º caso: Se $x>0$, $y>0$ e $z>0$, pelo método de Lagrange, (x,y,z) é solução de:
$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) \,//\, (1,1,1) \\ x+y+z=1 \\ x>0, y>0, z>0 \end{cases}$$

e temos $(px^{p-1}, py^{p-1}, pz^{p-1})$ paralelo a $(1,1,1)$. Logo $px^{p-1}=py^{p-1}=pz^{p-1}$ e como $x+y+z=1$, temos $x=y=z=\frac{1}{3}$

2º caso: Se $z=0$, $x>0$ e $y>0$, então (x,y) é ponto de máximo ou de mínimo de $h(x,y)=f(x,y,0)=x^p+y^p$ em $S=\{(x,y): x+y=1, x>0, y>0\}$. Pelo método de Lagrange, temos $\nabla h(x,y)=(px^{p-1}, py^{p-1})$ paralelo a $(1,1)$ e, portanto $x=y=\frac{1}{2}$

De modo análogo:

3º caso: Se $x=0$, $y>0$ e $z>0$, então $y=z=\frac{1}{2}$

4º caso: Se $y=0$, $x>0$ e $z>0$, então $x=z=\frac{1}{2}$

Os únicos candidatos a ponto de máximo ou de mínimo de f em K são $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$, $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ e os pontos não incluídos nos quatro casos, que são: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Calculando f nesses pontos temos:

$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = 3\,\frac{1}{3^p} = 3^{1-p}$

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)=f(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})=2\frac{1}{2^p}=2^{1-p}<3^{1-p}$ pois $1-p>0$

$f(1,0,0)=f(0,1,0)=f(0,0,1)=1<2^{1-p}<3^{1-p}$ pois $1-p>0$

Assim, para todo (x,y,z) em K, temos $f(x,y,z)\leq 3^{1-p}$
Logo $x^p+y^p+z^p\leq 3^{1-p}$ para todo (x,y,z) com $x+y+z=1$ $x>0$, $y>0$, $z>0$.

O valor mínimo de f em K é 1, que é assumido apenas nos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Se $x+y+z=1$, $x>0$, $y>0$ e $z>0$ então (x,y,z) é um ponto de K e (x,y,z) não é um dos pontos de K onde f assume o valor mínimo 1. Logo, se $x+y+z=1$ $x>0$, $y>0$ e $z>0$, temos $x^p+y^p+z^p>1$

Observação: No 1º caso, o método de Lagrange foi usado na região $R=\{(x,y,z)\in A: g(x,y,z)=2\}$, sendo $g(x,y,z)=x+y+z$ e $A=\{(x,y,z): x>0, y>0, z>0\}$. As hipóteses estão satisfeitas pois A é aberto e as funções g e f são de classe C^1 em R.

No 2º caso, o método de Lagrange foi usado na região $S=\{(x,y)\in U : j(x,y)=2\}$, sendo $j(x,y)=x+y$ e $U=\{(x,y): x>0, y>0\}$. As hipóteses estão satisfeitas pois U é aberto de $\mathbb{R}^2$ e as funções j e h são de classe C^1 em S