2. **(2,0)** Seja $f(x,y) = e^{3y} + x^3 - 3xe^y$.

B

(a) Encontre os ponto críticos de f e classifique-os.

(b) Existe $(x_0, y_0) \in R^2$ que seja ponto de máximo ou de mínimo de f em $\mathbb{R}^2$? **JUSTIFIQUE!**

a) $D_f = \mathbb{R}^2$; $(x,y) \in D_f$ é ponto crítico $\Longleftrightarrow (\nabla f)(x,y) = (0,0)$

$(\nabla f)(x,y) = (3x^2 - 3e^y, 3e^{3y} - 3xe^y)$

$\therefore$ Os pontos críticos são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3e^y = 0 & \text{I} \\ 3e^{3y} - 3xe^y = 0 & \text{II} \end{cases}$$

De I temos que $e^y = x^2$. Substituindo em II:

$3x^6 - 3x^3 = 0 \Longleftrightarrow 3x^3(x^3 - 1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1. \end{cases}$

Se $x = 0$, segue de I que $e^y = 0$, impossível.

Se $x = 1$, segue de I que $e^y = 1 \Longleftrightarrow y = 0$.

$\therefore$ $(1,0)$ é o único ponto crítico de f.

Temos:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 6$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3e^y \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = -3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 9e^{3y} - 3xe^y \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 9 - 3 = 6$

$$\therefore\ H_f(1,0) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36-9 = 27$$

Como f é de classe $\mathcal{C}^2$; $H_f(1,0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) > 0$, segue que $(1,0)$ é ponto de mínimo local.

b) Suponhamos que (x_0, y_0) seja extremante (máximo ou mínimo) global.

Sendo f de classe $\mathcal{C}^1$, devemos ter então $(\nabla f)(x_0,y_0) = (0,0)$. Do item b), segue então que $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Entretanto, temos

$f(1,0) = 1+1-3 = -1$,

$f(0,0) = 1$ e $f(-3,0) = 1-27+9 = -17$.

Portanto $(0,1)$ não é extremante ~~local~~ e segue que não existem extremantes globais.

Alternativamente, temos

$f(x,0) = 1 + x^3 - 3x$.

Portanto, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$ e

segue que não existem extremantes globais.