2. **(2,0)** Seja $f(x,y) = 3ye^x - e^{3x} - y^3$.

A

(a) Encontre os ponto críticos de f e classifique-os.

(b) Existe $(x_0, y_0) \in R^2$ que seja ponto de máximo ou de mínimo de f em $\mathbb{R}^2$? **JUSTIFIQUE!**

a) $D_f = \mathbb{R}^2$; $(x,y) \in D_f$ é ponto crítico $\Leftrightarrow$

$\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$(\nabla f)(x,y) = (3ye^x - 3e^{3x}, 3e^x - 3y^2)$

$\therefore$ Os pontos críticos são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} 3ye^x - 3e^{3x} = 0 & \text{I} \\ 3e^x - 3y^2 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

II $\Leftrightarrow$ $e^x = y^2$. Substituindo em I:

$3y^3 - 3y^6 = 0 \Leftrightarrow 3y^3(1-y^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou} \\ y = 1 \end{cases}$

Se $y = 0$, de II segue que $e^x = 0$, impossível.

Se $y = 1$, de II segue que $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

$\therefore$ $(0,1)$ é o único ponto crítico de f.

Agora, temos:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (3ye^x - 9e^{3x}) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 3 - 9 = -6$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (3e^x) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = -6$

$\therefore \quad H_f(0,1) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$

Como f é de classe C^2 e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) < 0$, segue que $(0,1)$ é ponto de máximo local.

b) Suponhamos que (x_0, y_0) seja extremante (máximo ou mínimo) global.

Sendo f de classe C^1, devemos ter então $(\nabla f)(x_0, y_0) = (0,0)$. Do ítem b), segue então que $(x_0, y_0) = (0,1)$.

Entretanto, temos:

$f(0,1) = 3 - 1 - 1 = 1$,

$f(0,0) = -1$ e $f(0,-3) = -9 - 1 + 27 = +17$

Portanto $(0,1)$ não é extremante e então não existem extremantes globais.

Alternativamente, observemos que

$f(0,y) = 3y - 1 - y^3$.

Portanto $\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = \mp \infty$.

Segue que não existem extremantes globais.