Questão 1 – B

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
$(x, y, z) \longmapsto x^4 + x^2 + y^2 - z^2 - 2$

Então $f \in C^1$ ($\therefore$ derivável) e $f \circ \Gamma = \text{cte.} = 0$ (pois $S = f^{-1}(0)$ e $\text{Im}\, \Gamma \subset S$); portanto, pela regra da cadeia, conclui-se que

(i) $\langle \nabla f(\Gamma(2)), \Gamma'(2) \rangle = 0$

Por outro lado, 2 é pto. de máximo de $g \circ \Gamma$; como esta função é derivável (pois $g \in C^1$ e Γ derivável), segue-se do teorema de Fermat que $(g \circ \Gamma)'(2) = 0$. Portanto, pela regra da cadeia:

(ii) $\langle \nabla g(\Gamma(2)), \Gamma'(2) \rangle = 0$

Como $(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3)\ \nabla f(x, y, z) = (4x^3 + 2x, 2y, -2z)$
$\therefore \nabla f(1, 1, 1) = (6, 2, -2)$, segue-se

$$\nabla f(1,1,1) \wedge \nabla g(1,1,1) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (6, -8, 10);$$

por (i) e (ii), e por ser $\Gamma'(2) \neq 0$, $(6, -8, 10)$ é múltiplo de $\Gamma'(2)$. Portanto,

$$\{(1, 1, 1) + \lambda(6, -8, 10) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

é a reta pedida. #