Questão 1 - A

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
$(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+y^4-z^2-2$

Então $f \in C^1$ ($\therefore$ derivável) e $f \circ \Gamma = \text{cte.} = 0$ (pois $S = f^{-1}(0)$ e $\operatorname{Im} \Gamma \subset S$); portanto, pela regra da cadeia, conclui-se que

(i) $\langle \nabla f(\Gamma(2)), \Gamma'(2) \rangle = 0$

Por outro lado, 2 é pto. de máximo de $g \circ \Gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; como esta função é derivável (pois $g \in C^1$ e Γ derivável) segue-se do teorema de Fermat que $0 = (g \circ \Gamma)'(2) \underset{\text{regra da cadeia}}{=} \langle \nabla g(\Gamma(2)), \Gamma'(2) \rangle$ (ii)

Como $(\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)\ \nabla f(x,y,z) = (2x, 2y+4y^3, -2z)$

$\therefore \nabla f(\overbrace{1,1,1}^{=\Gamma(2)}) = (2,6,-2)$, segue-se

$$\nabla f(1,1,1) \wedge \nabla g(1,1,1) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (8,-6,-10);$$

por (i) e (ii), e por ser $\Gamma'(2) \neq 0$, $(8,-6,-10)$ é múltiplo de $\Gamma'(2)$. Portanto, $\{(1,1,1) + \lambda(8,-6,-10) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ é a reta pedida. #