4. (3 pontos) Seja $f(x,y,z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2$. Obtenha os valores máximo e mínimo de f no compacto $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4 \text{ e } z = x + y - 2\}$

Como K é compacto e f é contínua o problema tem solução.

(1) Procurar os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f em

$$\begin{cases} \underbrace{x^2+y^2+2z^2}_{g(x,y,z)} = 4 \\ \underbrace{x+y-z}_{h(x,y,z)} = 2 \end{cases}$$

$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$

$\nabla h(x,y,z) = (1, 1, -1)$

Se $\nabla g(x,y,z) \parallel \nabla h(x,y,z) \Rightarrow (2x, 2y, 4z) = \lambda(1,1,-1)$.

Assim: $x = y = -2z$. Portanto: $z = -2z - 2z - 2$

$\Rightarrow 5z = -2 \Rightarrow z = -2/5 \Rightarrow x = y = 4/5$

Mas $x^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{32}{25} = \frac{40}{25} \neq 4$.

Portanto $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) \neq \vec{0}$, $\forall (x,y,z)$ com $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ e $z = x + y - 2$.

Por Lagrange temos que os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f estão entre os pontos que satisfazem:

$$(*)\begin{cases} \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ com } \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ \text{e } x^2+y^2+2z^2=4 \\ z = x+y-2 \end{cases}$$

Então:
$$\begin{vmatrix} x & -4y & 2z \\ x & y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$-8yz - 2yz - 1(xy + 4xy) = 0$$

$$-5xy + 10yz = 0 \implies 5y(x+2z) = 0$$

$$\implies y = 0 \text{ ou } x = -2z$$

$\boxed{y=0}$ $\begin{cases} x^2+2z^2=4 \\ z = x-2 \end{cases} \implies x^2 + 2x^2 - 8x + 8 = 4$

$$\implies 3x^2 - 8x + 4 = 0 \implies x = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$$

$x = 2 \Rightarrow z = 0$

o ponto é $(2,0,0)$

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{2}{3} - 2 = -4/3$

e o ponto é $(2/3, 0, -4/3)$.

Se $\boxed{x = -2z}$

$z = -2z + y - 2 \Rightarrow \boxed{y = 3z + 2}$

$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$

$\Rightarrow 4z^2 + 9z^2 + 12z \cancel{+4} + 2z^2 = \cancel{4}$

$15z^2 + 12z = 0 \Rightarrow z = 0$

ou $z = -12/15 = -\frac{4}{3}$

$z = 0 \Rightarrow x = 0$ e $y = 2$

$(0, 2, 0)$

$z = -4/3 \Rightarrow x = -8/3$; $y = -2$

$(-8/3, -2, -4/3)$

(x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$
$(2,0,0)$	4 } MÁXIMO
$(2/3, 0, -4/3)$	$\frac{4}{9} + 2.\frac{16}{9} = 4$ } MÁXIMO
$(0,2,0)$	-16 → MÍNIMO
$(-8/3, -2, -4/3)$	$\frac{64}{9} - 16 + 2.\frac{16}{9} = -16/3$

(2) Agora vamos achar os candidatos que satisfazem $x^2+y^2+2z^2 < 4$

$$z = x+y-2 \iff \underbrace{x+y-z}_{h(x,y,z)} = 2$$

$$\nabla h(x,y,z) = (1,1,-1)$$

Os candidatos estão entre os pontos que satisfazem $\nabla f(x,y,z) = \lambda(1,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

e $x+y-z=2$

$x^2+y^2+2z^2 = 4$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ x & -4y & 2z \end{vmatrix} = \vec{0} \implies 2z-4y=0, \quad 2z+x=0,$$

$$\implies x = -2z \quad \text{e} \quad y = \frac{z}{2}$$

$$-2z + \frac{z}{2} - z = 2$$

$$-\frac{5}{2}z = 2$$

$$\boxed{z = -4/5}$$

$x = 8/5$ e $y = -2/5$

Mas $\dfrac{64}{25} + \dfrac{4}{25} + 2 \cdot \dfrac{16}{25} = \dfrac{100}{25} = 4$ // Logo esse ponto não satisfaz $x^2+y^2+2z^2 < 4$. Assim os pontos são os obtidos em (1).