2. (2,5 pontos) Seja $f(x,y) = (x^2 - 2xy)e^{-y}$

(a) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

(b) Determine o máximo e o mínimo de f no quadrado (com interior e bordas) cujos vértices são $(0,0), (3,0), (3,3)$ e $(0,3)$.

(a.) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x - 2y)e^{-y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-2x - x^2 + 2xy)e^{-y}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow -2x - 2x^2 + 2xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Assim, os pontos críticos são $(0,0)$ e $(2,2)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{-y}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (-2 - 2x + 2y)e^{-y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2x + x^2 - 2xy + 2x)e^{-y}$

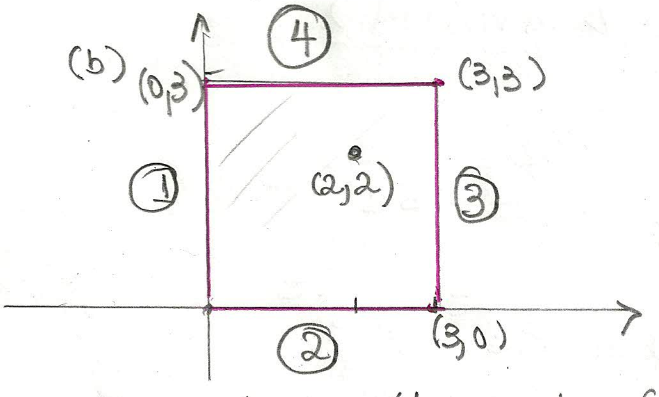
Assim, $H(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0.$

Logo (0,0) é ponto de sela.

$H(2,2) = \begin{vmatrix} 2e^{-2} & -2e^{-2} \\ -2e^{-2} & 4e^{-2} \end{vmatrix} = 4e^{-4} > 0$ e

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = 2e^{-2} > 0 \Rightarrow$ (2,0) é ponto de mínimo local

(b)



Os candidatos a pontos de máximo e mínimo de f no quadrado são:

(1) pontos críticos de f no interior do quadrado. $(2,2)$

(2) pontos de máximo e de mínimo de f na fronteira do quadrado.

(1) $x = 0$ e $0 \leq y \leq 3$

$f(0,y) = 0$ $\quad (0,y)$, $y \in [0,3]$.

(4) $y = 3$ e $0 \leq x \leq 3$

$f_1(x) = f(x,3) = e^{-3}(x^2 - 6x)$

candidatos $x = 0$ e $x = 3$ (extremos de $[0,3]$)

$\Rightarrow (0,3)$ e $(3,3)$

e ptos críticos de f_1 em $]0,3[$.

Mas $f_1'(x) = (2x-6)e^{-3}$ e f_1 não tem ptos críticos em $]0,3[$.

(3) $x = 3$ e $0 \leq y \leq 3$

$f_2(y) = f(3,y) = (9-6y)e^{-y}$

Candidatos: $y = 0$ e $y = 3$ (extremos de $[0,3]$).

pontos críticos de f em $]0,3[$.

$f_2'(y) = -6e^{-y} - 9e^{-y} + 6ye^{-y} = 0$

$= e^{-y}(-15+6y) \Rightarrow y = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \in]0,3[$

Temos então o ponto $(3, 5/2)$.

(2) $y = 0$ e $0 \leq x \leq 3$

$f_3(x) = x^2$. Candidatos $x = 0$ e $x = 3$.

$(0,0)$ e $(3,0)$

(x_0, y_0)	$f(x_0, y_0)$
$(2,2)$	$-4e^{-2}$ MÍNIMO
$(0,y),\ y\in[0,3]$	0
$(3,0)$	$9e^{-3} \longrightarrow$ MÁXIMO
$(3,3)$	$-9e^{-3}$
$(3, 5/2)$	$(9-\cancel{2}.3.\frac{5}{\cancel{2}})e^{-5/2} = -6e^{-5/2}$

Se $h(t) = t^2 e^{-t} \Rightarrow h'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t}$

$= t(2-t)e^{-t}$

$$\begin{array}{cccccc} & - - & 0 & ++++ & 2 & - - & h' \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & h \end{array}$$

$\Rightarrow h(2) > h(3)$

$\Rightarrow 4e^{-2} > 9e^{-3}$

$\Rightarrow \underline{\underline{-4e^{-2} < -9e^{-3}}}$

Também, $4e^{-2} > \frac{25}{4}e^{-5/2} > 6e^{-5/2}$

Logo $-4e^{-2} < -6e^{-5/2}$