1. (3 pontos) Seja a função $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + xy^2}$

(a) Determine $\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{u}}}(0,0)$ para todo vetor unitário $\vec{u} = (a,b)$.

(b) É f diferenciável em $(0,0)$? **JUSTIFIQUE!**

(c) Seja $q \neq 0$. Existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,q)$?

(d) Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é f diferenciável? **JUSTIFIQUE!**

(a) Por definição $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+at,\, 0+bt) - f(0,0)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{a^3t^3 + ab^2t^3}}{t} = \sqrt[3]{a(\underbrace{a^2+b^2}_{1})} = \sqrt[3]{a}$

(b) Por (a) temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ $(\vec{u} = (1,0))$

e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $(\vec{u} = (0,1))$.

Se f fosse diferenciável em $(0,0)$, teríamos que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle = \langle (1,0), (a,b) \rangle = a$.

Ou seja teríamos que ter $\sqrt[3]{a} = a$ $\forall a$ com $|a| \leq 1$. É claro que isso não é verdade.
(Só é verdade para $a = 0$ ou $a = \pm 1$).

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,q) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,q) - f(0,q)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + xq^2}}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{1 + \frac{q^2}{x}}$ e esse limite não existe,

$(\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{1 + q^2/x} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{1 + \frac{q^2}{x}} = -\infty$.
$(q \neq 0 \Rightarrow q^2 > 0))$

(d) Se $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + xy^2)^{-2/3}(3x^2 + y^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}(x^3+xy^2)^{-2/3} \cdot 2xy$

e essas derivadas são contínuas.

Em $(0,0)$ f não é diferenciável por (b) e em $(0,q)$, $q \neq 0$, f não é diferenciável por (c).

Logo f é diferenciável nos pontos (x,y) com $x \neq 0$.