MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

2ª Lista de Exercícios - 2012

1. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

   (a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

   (a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, sendo a e b constantes.

3. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

   Sugestão: Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

4. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

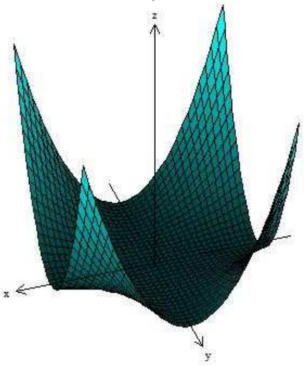
5. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até 2ª ordem.

   (a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

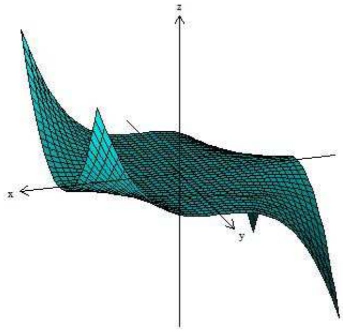
   (b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

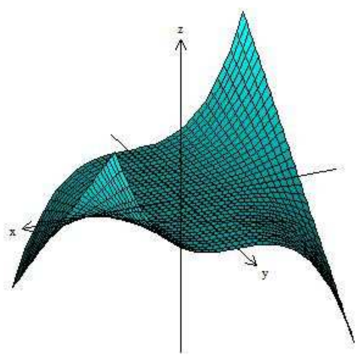
6. As superfícies abaixo são os gráficos de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e de suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Identifique cada superfície e justifique sua resposta.



(a)



(b)



(c)

7. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

8. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \text{sen}\,(x+3y), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

   (b) f é contínua em (0,0)?

   (c) f é diferenciável em (0,0)?

9. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua em (0,0).

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) É f diferenciável em $(0,0)$?

   (d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

10. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

    (b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\text{sen}\,\left((x^2+y^2)^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$.

    (b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

    (c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

    (d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

12. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

    (a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

13. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável, sendo:

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

(b) $f(x,y) = x|y|$

(c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$

(d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

14. Mostre que não existe nenhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gradiente é dado por: $\nabla f(x,y) = (x^2 y, y^2), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

15. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

(a) $w = x^2 + y^2; x = t^2 + u^2, y = 2tu$.

(b) $w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; $x = t \cos u$, $y = t \,\mathrm{sen}\, u$.

(c) $w = x^2 + y^2 + z; x = tu, y = t + u, z = t^2 + u^2$.

16. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de 1,2cm/s enquanto sua altura está crescendo à taxa de 3cm/s. Qual a taxa de variação do volume do cilindro no instante em que o raio vale 80 cm e a altura vale 150 cm?

17. Um carro A está viajando para o norte a 90km/h e um carro B está viajando para o oeste a 80km/h. O carro A está se aproximando e o carro B está se distanciando da intersecção das duas estradas. Em um certo instante, o carro A está a 0,3km da intersecção e o carro B a 0,4km. Neste instante, estão os carros se aproximando ou se distanciando um do outro? A que velocidade?

18. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$ e

$$g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t).$$

Determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

19. Seja $f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e sejam a, b, c, d constantes tais que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ e $ac + bd = 0$. Seja $g(u,v) = f(au + bv, cu + dv)$. Mostre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au + bv, cu + dv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au + bv, cu + dv).$$

20. Seja $v(r,s)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $u(x,t) = v(x+ct, x-ct)$, onde c é constante.

   (a) Verifique que
   $$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = w(x+ct, x-ct),$$
   onde $w(r,s) = -4c^2 v_{rs}(r,s)$.

   (b) Mostre que se $u(x,t)$ é uma solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ então existem funções F e G de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que
   $$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).[*]$$

   [***Observação:** O item (b) deste exercício foge do contexto desta lista, mas foi introduzido para completar o enunciado do resultado. Entretanto você pode resolver o item (b) com o conhecimento de cálculo que você tem! Reveja também oExercício 5 (a).]

21. Seja $u = u(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e defina $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Verifique que
   $$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$
   sendo Δu, por definição, dado por $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

22. Seja $f = f(x,y)$ função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Se $u(s,t) = f(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\,\mathrm{sen}\,t)$, mostre que
   $$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t)\right]^2 = \mathrm{e}^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\right)^2\right]$$
   e que
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{e}^s\cos t, \mathrm{e}^s\mathrm{sen}\,t) = \mathrm{e}^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,t)\right].$$

23. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
   $$g(u,v) = uf(u^2 - v, u + 2v)$$

   (a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de f.

   (b) Sabendo que $3x + 5y = z + 26$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,4,f(1,4))$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

24. Seja $F(r,s) = G(\mathrm{e}^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

(b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

25. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

(a) $z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$ (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$
(c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$ (d) $z = \mathrm{e}^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$

26. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe mesmo só um?

27. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3 y$.

28. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

29. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

30. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

31. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

32. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Fixado um certo $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto P:

(a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$; (b)$\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$; (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

33. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$ e tal que $2x + y + z = 7$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(0, 2, f(0,2)\big)$. Seja

$$g(u,v) = u\, f\big(\operatorname{sen}(u^2 - v^3), 2u^2 v\big).$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de g no ponto $\big(1, 1, g(1, 1)\big)$ seja paralelo ao vetor $(4, 2, a)$.

34. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2, 1)$.

35. O gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ em um ponto $P = \gamma(t_0)$ com $t_0 > 0$. Considere a curva de nível de f que contém P. Encontre a equação da reta tangente a essa curva no ponto P.

36. Sabe-se que a curva $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t^2 + t)$ é uma curva de nível da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $f(\gamma(t)) = 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Admita que existem 2 pontos $(x_0, y_0) \in \text{Im}\gamma$ com a propriedade de que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, 2)$ é paralelo ao plano $x + y - z = 0$. Encontre esses 2 pontos.

37. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

    (a) $f(x, y) = x\mathrm{e}^{-y} + 3y$, $(1, 0)$; (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(1, 2)$;

38. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 4)$, $C(2, 4)$ e $D(6, 15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AB}/||\overrightarrow{AB}||$ é $3\sqrt{5}$ e que a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AC}/||\overrightarrow{AC}||$ é $\sqrt{8}$. Encontre o vetor gradiente $\nabla f(1, 3)$ e a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AD}/||\overrightarrow{AD}||$.

39. Mostre que $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$ é contínua em $(0, 0)$ e tem todas as derivadas direcionais em $(0, 0)$. É f diferenciável em $(0, 0)$?

40. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t + 1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$ e na direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3, 4)$.

41. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

    (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0, 0)$.

    (b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t = 0$, onde $\gamma(t) = (-t, -t)$.

(c) Seja $\vec{u} = (m, n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

(d) É f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

42. Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de ambas curvas $\gamma(t) = \left(-\dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}\right)$ e $\sigma(u) = \left(u+1, u, u+2+\dfrac{1}{u}\right)$, $u \neq 0$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

43. Seja $f(x,y) = (xy)^{1/3}$.

(a) Determine as derivadas parciais de f nos pontos (x,y) tais que $xy \neq 0$.

(b) Calcule as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

(c) Se a e b são números reais não-nulos, existem as derivadas parciais $f_x(0,b)$ e $f_y(a,0)$?

(d) Determine os pontos em que f é diferenciável. Justifique.

44. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Mostre que existem as derivadas direcionais de f em todas as direções no ponto $(0,0)$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle$ para todo vetor unitário $\vec{u}$. É f diferenciável em $(0,0)$?

45. A curva de nível 1 da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (t, 2t^2), t \in \mathbb{R}$. A curva $\sigma(u) = (-u, u^3, u^6 - u^5 - 2u^4 + 1), u \in \mathbb{R}$ tem sua imagem contida no gráfico de f.

(a) Determine o vetor tangente à curva σ no ponto $(-2, 8, 1)$.

(b) Determine o vetor tangente à curva γ no ponto $(-2, 8)$.

(c) Calcule o gradiente de f em $(-2, 8)$.

RESPOSTAS

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

2. (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)$.

   (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = af'(ax+by)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = bf'(ax+by)$.

3. -2 8. (b) Não é contínua em (0,0). (c) Não é diferenciável em (0,0).

9. (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. (c) Não.

(d) Nenhuma das derivadas parciais é contínua em $(0,0)$. 10. (b) Não

11. (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\operatorname{sen}((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) Sim. (d) Sim.

13. (a) f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.

(b) f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$.

(c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. (d) O mesmo que o item (c).

16. -9600π cm^3/s 17. Distanciando-se a 10km/h. 18. $a = 3$ 23) b) 21.

24.(a) $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 e^{2rs}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 e^{rs} s\cos s\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} + 9r^4\cos^2 s\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 e^{rs}\frac{\partial G}{\partial x} + 6r\cos s\frac{\partial G}{\partial y}$; (b) 0.

25. (a) $z = 1; X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $2x + y - z - 1 = 0; X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $6x - 4y + z + 5 = 0; X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $e^3 y - z - e^3 = 0; X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

26. $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um) 27. $6x - y - z + 6 = 0$ 28. $k = 8$

30. $\nabla f(2,1) = (4,8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$. 31. $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5,-4), \lambda \in \mathbb{R}$.

32. (c) 33. $a = -4$ 34. $(1,4)$ 35. $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(-1,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

36. $(2,-1)$ e $(10/9, -7/27)$. 37. (a) $\sqrt{5},\ (1,2)$; (b) $\frac{2}{\sqrt{5}},\ \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

38. $\nabla f(1,3) = (11,-7)$ e a derivada direcional pedida é $-29/13$.

39. f não é diferenciável em $(0,0)$. 40. $4/5$ 41. (d) Não é. 42. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

43. (a) $f_x(x,y) = \frac{y}{3(xy)^{2/3}}$; $f_y(x,y) = \frac{x}{3(xy)^{2/3}}$ (b) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

(c) não existem. (d) f é diferenciável no conjunto $\{(x,y) | xy \neq 0\}$.

44. f não é diferenciável em $(0,0)$ 45.(c) $\nabla f(-2,8) = (96,12)$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

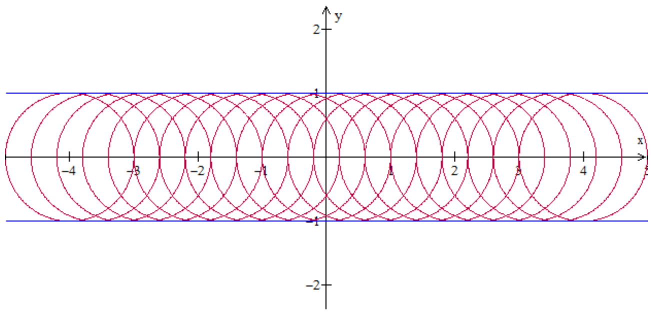
Para resolver o exercício a seguir você vai precisar da Regra da Cadeia, do Teorema Fundamental do Cálculo e do seguinte resultado:

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e defina a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\Phi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$. Então a função Φ é derivável e vale que $\Phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

1. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$$
sendo $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Mostre que
$$F'(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt + f\big(x, b(x)\big)\, b'(x) - f\big(x, a(x)\big)\, a'(x)$$

2. Calcule $F'(x)$ para:
(a) $F(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\,dt$
(b) $F(x) = \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\,dt$
(c) $F(x) = \int_{\cos x}^{\cosh x} \operatorname{sen}(x^2t^2)\,dt$

3. **Envelope de uma família de curvas:** Diz-se que uma curva plana (ou conjunto de curvas planas) Γ é um **envelope** de uma família de curvas planas $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se Γ tangenciar, em cada um de seus pontos, uma das curvas da família dada. Por exemplo, o par de retas $y = \pm 1$ é um envelope da família de círculos $\{C_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ dada por
$$C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 - 1 = 0\}$$
(veja a figura).



Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Suponha que $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ seja uma família de curvas dada por, $\forall \alpha \in I$, $C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y,\alpha) = 0\}$, com $F : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, e que tal família admita um envelope dado por uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que, $\forall \alpha \in I$, γ é tangente a C_α no ponto $\gamma(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$. Mostre que, para cada $\alpha \in I$, $(x(\alpha), y(\alpha))$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Por exemplo, no caso da família de círculos dada anteriormente, ponha $F(x, y, \alpha) = (x-\alpha)^2 + y^2 - 1$, de modo que $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = -2(x-\alpha)$ e a solução do sistema acima é dada por $x = \alpha$, $y = \pm 1$, o que parametriza o par de retas $y = \pm 1$.

Sugestão: Derive $F(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = 0$ pela regra da cadeia e use o fato de que $F(x, y, \alpha) = 0$ é a curva de nível 0 da função $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F_\alpha(x, y) = F(x, y, \alpha)$, portanto $\nabla F_\alpha(x(\alpha), y(\alpha))$ é ortogonal a $\gamma'(\alpha) = (x'(\alpha), y'(\alpha))$.

4. Numa sala quadrada de lado L, uma porta deslizante é representada por um segmento de comprimento L cujas extremidades são apoiadas em dois lados consecutivos e deslizam sobre os mesmos. Calcular a razão entre a área útil (para se colocar móveis) e a área total da sala.

   Sugestão: A área útil é delimitada pelo envelope da família de segmentos formada pelas possíveis posições da porta, conforme a figura. Mostre que um envelope dessa família é um arco de astroide de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$.