

**MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II**  
**1ª Lista de Exercícios - 2012**

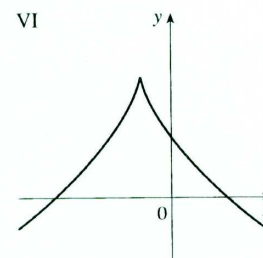
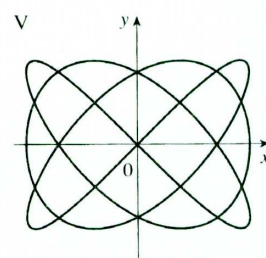
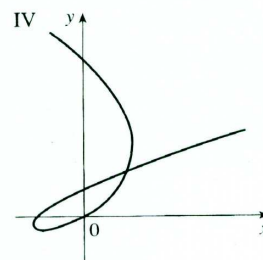
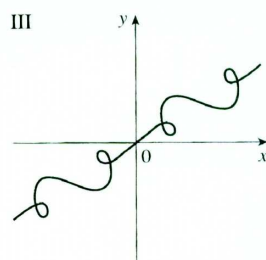
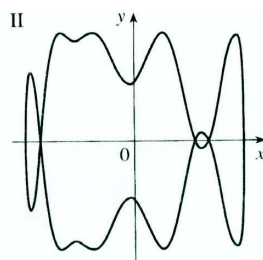
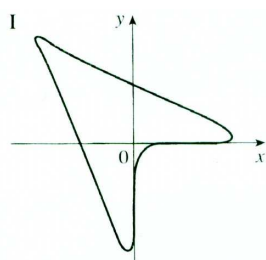
**CURVAS E SUPERFÍCIES**

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas, indicando o sentido de percurso:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\gamma(t) = (1, t), t \in \mathbb{R}$                                | (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$        |
| (c) $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t), t \in \mathbb{R}$                    | (d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\sin t), t \in [-\pi, \pi]$  |
| (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1 - t), t \in [-2, 0]$                     | (f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \geq 0$            |
| (g) $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t), t \in \mathbb{R}$ |
| (i) $\gamma(t) = (\sin t, \cos^2 t + 2), t \in \mathbb{R}$                | (j) $\gamma(t) = (2 + e^{-t}, 3 - e^t), t \geq 0$               |

2. Associe as equações paramétricas aos gráficos I a VI. Justifique sua escolha.

- |  |  |
|--|--|
| (a) $x = t^3 - 2t, y = t^2 - t$                  | (b) $x = t^3 - 1, y = 2 - t^2$           |
| (c) $x = \sin(3t), y = \sin(4t)$                 | (d) $x = t + \sin(2t), y = t + \sin(3t)$ |
| (e) $x = \sin(t + \sin t), y = \cos(t + \cos t)$ | (f) $x = \cos t, y = \sin(t + \sin(5t))$ |

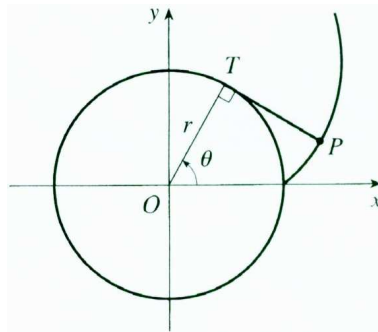


3. Considere  $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$ . A função  $f$  é derivável em  $x = 0$ ? Determine uma curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de  $f$ .

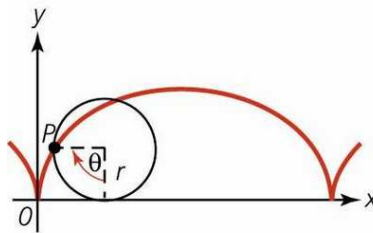
4. Mostre que a curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t \cos t)$  tem duas tangentes em  $(0,0)$  e ache suas equações.

5. Sejam  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  e  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável. Mostre que, se existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $\|\gamma'(t)\| = C$ , para todo  $t \in I$ , então  $\gamma(t)$  é ortogonal a  $\gamma'(t)$ , para todo  $t \in I$ . Vale a recíproca? Interprete geometricamente.
6. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto  $P$  no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio  $r$  e centro  $O$ , a posição inicial de  $P$  for  $(r, 0)$ , e se o parâmetro  $\theta$  for escolhido como na figura, mostre que as equações paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos \theta + \theta \sin \theta) \quad y = r(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$



7. Uma circunferência de raio  $r$  rola sem escorregar ao longo do eixo  $Ox$ . Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de cicloide; veja figura.)



8. Ache e esboce o domínio das funções:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$	(b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
(c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$	(d) $f(x, y) = \frac{x}{y^x}$
(e) $f(x, y) = \operatorname{tg}(x - y)$	(f) $f(x, y) = \ln(xy^2 - x^3)$
(g) $f(x, y) = \ln(16 - 4x^2 - y^2)$	

9. Esboce uma família de curvas de nível de:

(a) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$	(b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$
(c) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 - y^2}$	(d) $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

10. Esboce os gráficos de:

(a)  $f(x, y) = 1 - x - y$

(b)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$

(d)  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

(e)  $f(x, y) = y^2 - x^2$

(f)  $f(x, y) = y^2 + 1$

(g)  $f(x, y) = y^2 + x$

(h)  $f(x, y) = xy$

(i)  $f(x, y) = e\sqrt{x^2 + y^2}$

(j)  $f(x, y) = \frac{1}{4x^2 + 9y^2}$

(k)  $f(x, y) = (x - y)^2$

(l)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$

(m)  $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + 2y^2)^2}$

(n)  $f(x, y) = \ln(9x^2 + y^2)$

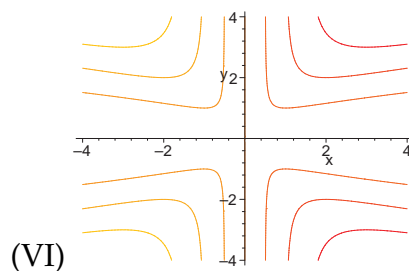
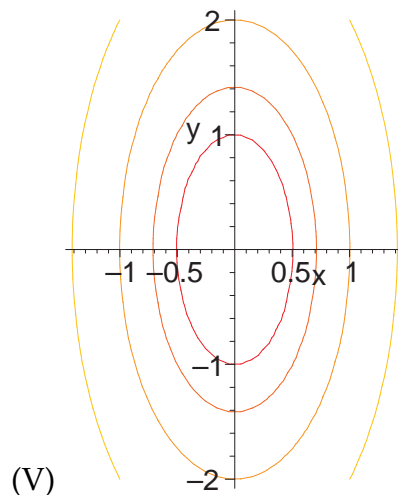
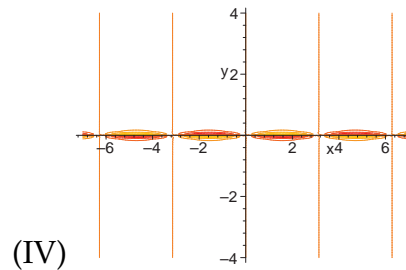
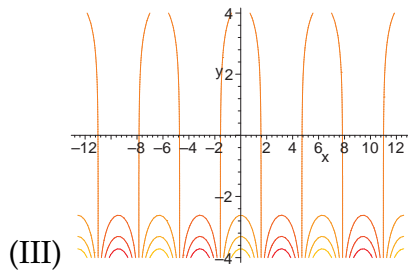
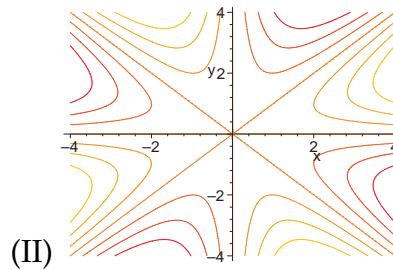
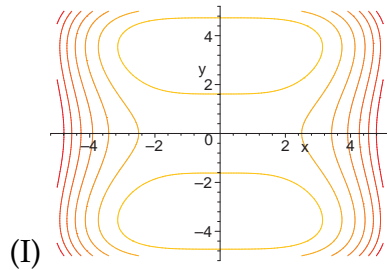
(o)  $f(x, y) = 2 - \sqrt[4]{x^2 + 4y^2}$

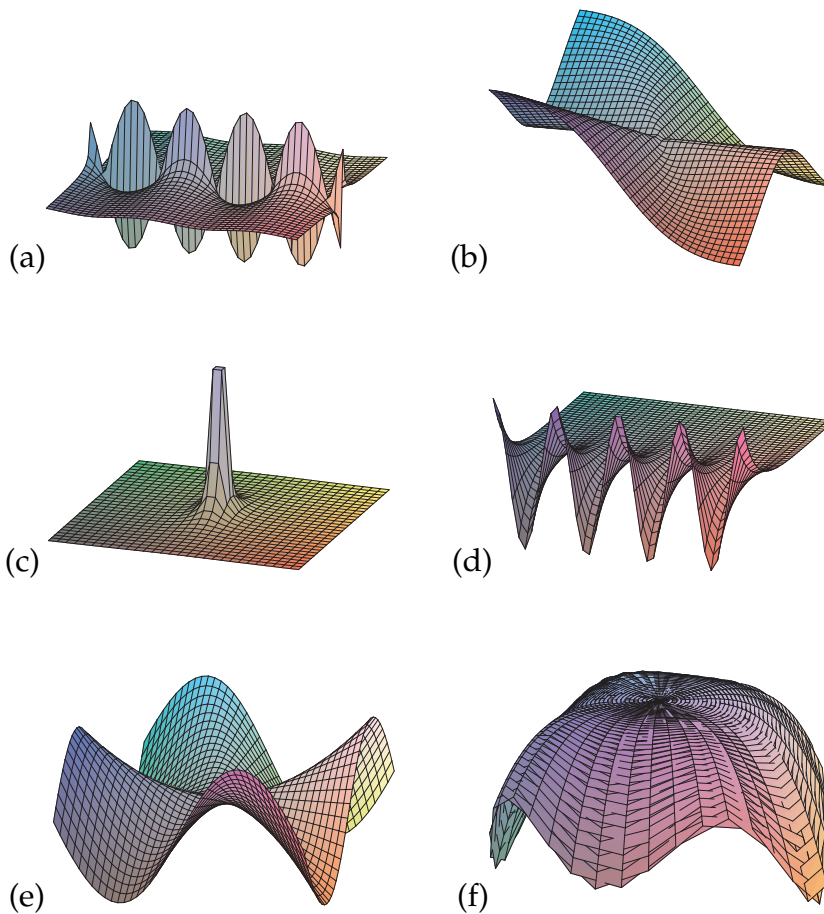
(p)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

(q)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

(r)  $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$

11. São dadas a seguir as curvas de nível e os gráficos de seis funções de duas variáveis reais. Decida quais curvas de nível correspondem a quais gráficos.





12. Seja  $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$ , para  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Desenhe a imagem de  $\gamma$  indicando o sentido de percurso.

(b) A imagem de  $\gamma$  está contida na curva de nível de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$ ? Em caso afirmativo, em qual nível?

13. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que:

(a)  $x + 2y + 3z = 1$       (b)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$       (c)  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

(d)  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$       (e)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$       (f)  $x^2 - y^2 = 1$

(g)  $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ?

14. Verifique que a imagem da curva  $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\sin t)$ ,  $t \in [0, \pi[$ , está contida numa esfera com centro em  $(0, 0, 0)$  e esboce a imagem de  $\gamma$ .

15. Seja  $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 1} \cos t, \sqrt{t^2 + 1} \sin t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Verifique que a imagem de  $\gamma$  está contida na superfície  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Esboce a imagem de  $\gamma$ .

16. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

(a)  $\gamma(t) = (1, t, 1)$

(b)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$

(c)  $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t})$ ,  $t \geq 0$

(d)  $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t)$ ,  $t \geq 0$

(e)  $\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2} \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

(f)  $\gamma(t) = (1 + \sin t, 1 + \sin t, \cos t)$

17. Seja  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$  e seja  $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{t^2 + 4})$ ,  $t \geq 0$ .

(a) Mostre que a imagem de  $\gamma$  está contida no gráfico de  $f$ .

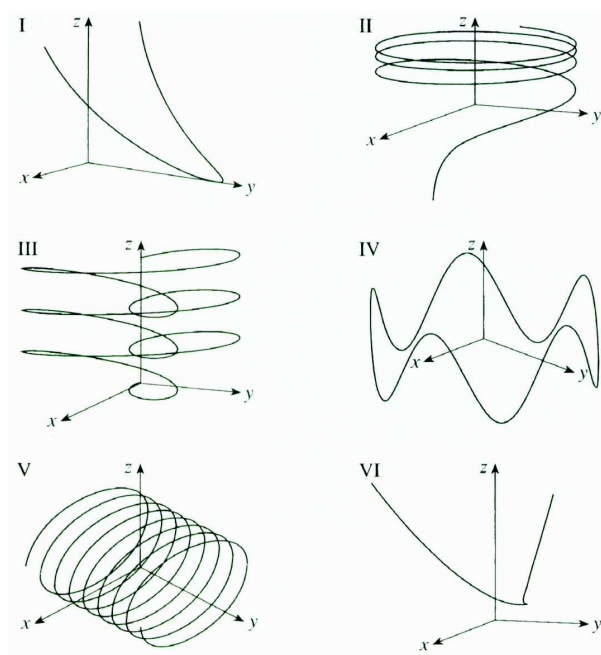
(b) Faça um esboço da imagem de  $\gamma$ .

18. Combine as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

(a)  $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \sin 4t)$       (b)  $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$

(c)  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$       (d)  $\gamma(t) = (\sin 3t \cos t, \sin 3t \sin t, t)$

(e)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \ln t)$       (f)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin 5t)$



19. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível  $k$  de  $f$  nos casos:

(a)  $f(x, y) = x + 2y - 3$ ,  $k = -2$ ;

(b)  $f(x, y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}$ ,  $k = 5$ ;

(c)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ ,  $k = 1$ .

Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ,  $(6, 0)$  e  $(\sqrt{2}, 1)$ , respectivamente.

20. (a) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção do parabolóide hiperbólico  $z = y^2 - x^2$  com o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

(b) Encontre uma parametrização para a curva obtida pela intersecção da superfície  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 1$  com o plano  $y = 2z + 1$ .

(c) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do plano  $x = z$  com o parabolóide  $x^2 + y^2 = z$ .

(d) Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção do cone  $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$  com o plano  $z = 2x + 1$ .

21. Encontre uma parametrização para  $C$  e a reta tangente a  $C$  no ponto  $P$ , onde:

(a)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = x + 1\}$  e  $P = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ .

(b)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z = x + 1\}$  e  $P = (0, 1, 1)$ .

(c)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$  e  $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ .

22. Seja  $f(x, y) = \frac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$ .

(a) Esboce as curvas de nível de  $f$  dos níveis  $c = 1$ ,  $c = 2$  e  $c = 3$ .

(b) Encontre uma função  $\gamma$  derivável, definida num intervalo, cuja imagem seja a curva de nível de  $f$  do nível  $c = 1$ .

(c) Determine o vetor tangente à curva  $\gamma$ , que você encontrou no item anterior, no ponto  $(-1, 0)$ .

(d) Seja  $\Gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\Gamma(t) = (\sin t, \cos t, z(t))$ . Sabendo que a imagem da curva está contida no gráfico de  $f$ , encontre o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $\Gamma(\frac{\pi}{3})$ .

23. Sejam  $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$  e

$$f(x, y) = ((x - 2)^2(y - 3))^{\frac{2}{3}} + 1.$$

Esboce a imagem de  $\gamma$  e mostre que a imagem de  $\gamma$  está contida em uma curva de nível de  $f$  indicando qual é o nível.

24. Sejam  $g(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 1$  e

$$\Gamma(t) = (2 - t, 3 + t, z(t)), t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que a imagem de  $\Gamma$  está contida no gráfico de  $g$ , encontre  $z(t)$ . Esboce a imagem de  $\Gamma$ .

### LIMITES E CONTINUIDADE

25. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{2x^4 + x^2y + y^2}$

(e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

(f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

(g)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 - y}$

(h)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} \\
 \text{(k)} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3} \\
 \text{(m)} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8} \\
 \text{(j)} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \operatorname{sen} \left( \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
 \text{(l)} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)} \\
 \text{(n)} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}
 \end{array}$$

26. Calcule os seguintes limites:

$$\text{(a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

27. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

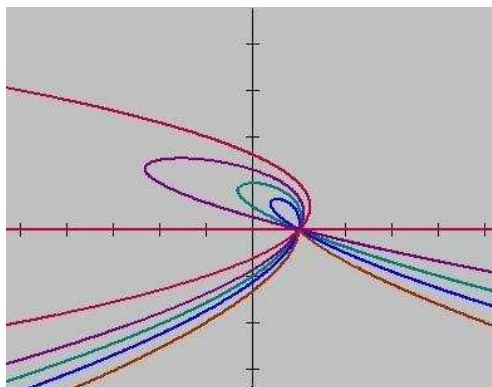
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

28. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^4+y^2} \operatorname{sen} \left( e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ L, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Existe algum número real  $L$  para o qual  $f$  seja contínua em  $(0,0)$ ? Justifique.

29. O domínio de uma função  $f$  é o conjunto  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (1,0)\}$ . A figura abaixo mostra as curvas de nível de  $f$  nos níveis  $k=0$ ,  $k=0,3$ ,  $k=0,5$ ,  $k=0,7$  e  $k=1$ . Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y)$ ? Justifique.



30. Seja  $f(x,y) = \frac{3(x-1)^2 + (y-1)^2}{x^2 - y^2}$ .

(a) Esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível de  $f$  nos níveis  $k=1$  e  $k=3$ .

(b) Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y)$ ? Justifique.

## RESPOSTAS

3. Não.  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

4.  $y = x$  e  $y = -x$ .

8. (a)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$

(b)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

(c)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$

(d)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

(e)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x + \frac{1+2k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(f)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$

(g)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 < 16\}$

12. (b) Sim, no nível 5.

13. Apenas a superfície do item (a).

23. no nível 2

24.  $z(t) = 2t^2 + 1$

25. (a) não existe

(b) 0

(c) 0

(d) não existe

(e) não existe

(f) não existe

(g) não existe

(h) 0

(i) 0

(j) 0

(k) não existe

(l) 1

(m) não existe

(n) 0

26. (a) 1

(b) 0

27.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$

28.  $L = 0$

29. O limite não existe.

30. O limite não existe.