Equivalência das Definições de Diferenciabilidade

Nos dois casos admita que o domínio da função f contém um disco aberto com centro no ponto (x_0, y_0).

1. **Definição:** (*Guidorizzi*) f é **diferenciável** em (x_0, y_0) se:

   (a) Existe $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e existe $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

   (b) Se $E(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk$ então
   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

2. **Definição:** (*Stewart*) f é **diferenciável** em (x_0, y_0) se:

   (a) Existe $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e existe $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

   (b) Existem funções $\epsilon_i = \epsilon_i(h,k), i = 1, 2$, com $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon_i(h,k) = 0$ para $i = 1, 2$, tais que
   $$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + \epsilon_1(h,k)h + \epsilon_2(h,k)k.$$

Vamos demonstrar que as duas definições são equivalentes.

(**Definição 2 $\Rightarrow$ Definição 1**) Suponha que existam funções ϵ_1 e ϵ_2 como na Definição 2. Então $E(h,k) = \epsilon_1(h,k)h + \epsilon_2(h,k)k$. Logo
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\epsilon_1(h,k)h + \epsilon_2(h,k)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\epsilon_1(h,k)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \epsilon_2(h,k)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right).$$

Como as funções $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ são limitadas e $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon_i(h,k) = 0$, para $i = 1, 2$, temos que $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, e a condição (b) da Definição 1 é satisfeita.

(**Definição 1 $\Rightarrow$ Definição 2**) Vamos agora assumir que f satisfaz a Definição 1, e construir as funções $\epsilon_i, i = 1, 2$. Para isso escreva, para $(h,k) \neq (0,0)$,
$$E(h,k) = \frac{E(h,k)(h^2+k^2)}{h^2+k^2} = \frac{E(h,k)h^2}{h^2+k^2} + \frac{E(h,k)k^2}{h^2+k^2} = \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}h + \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}k.$$

Sejam então, para $(h,k) \neq (0,0)$,
$$\epsilon_1(h,k) = \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \quad \text{e} \quad \epsilon_2(h,k) = \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Como $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ e $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ são limitadas, temos que
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon_i(h,k) = 0, i = 1, 2$$

e é claro que a condição (b) da Definição 2 é satisfeita.