4. Seja

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 3x^2 + 2y^2 \text{ e } z = (x-2)^2 + (y-1)^2\}.$$

(a) **(1,0)** Encontre uma parametrização para C, isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função derivável $\Gamma : I \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é C.

(b) **(1,5)** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,5) > 0$. Suponha que C esteja contida em uma superfície de nível de f e que o plano tangente a essa superfície no ponto $(1,-1,5)$ passe pelo ponto $(4,1,7)$. Determine a direção e sentido de crescimento máximo de f em $(1,-1,5)$.

(a) $\left.\begin{matrix} z = 3x^2+2y^2 \\ z = (x-2)^2+(y-1)^2 \end{matrix}\right\} \iff \begin{cases} 3x^2+2y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2 \\ z = 3x^2+2y^2 \end{cases}$

$3x^2+2y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2 \iff 3x^2+2y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$\iff 2x^2+4x+y^2+2y = 5 \iff 2(x+1)^2+(y+1)^2 = 8$

$\iff \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$

Assim, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists t \in [0,2\pi]$ tal que $x = -1 + 2\cos t$ e $y = -1+2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t$.

Logo $\Gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definida por

$\Gamma(t) = (-1+2\cos t, -1+2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t, 3(-1+2\cos t)^2 + 2(-1+2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t)^2)$

é uma parametrização de C.

(b) Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = k\}$ $(k = f(1,-1,5))$ a superfície de nível de f que contém $(1,-1,5)$.

Seja $\vec{v} = \nabla f(1,-1,5)$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ pois $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,5) > 0$.

Como $C \subset S$, a reta tangente à C em $(1,-1,5)$ está contida no plano tangente à S em $(1,-1,5)$.

Se $g(x,y) = 3x^2+2y^2$ e $h(x,y) = (x-2)^2+(y-1)^2$ então $C = G_g \cap G_h$. Logo o vetor tangente à C em $(1,-1,5)$ é paralelo a $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1), -1\right) \wedge \left(\frac{\partial h}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial h}{\partial y}(1,-1), -1\right)$, que é $(6,-4,-1) \wedge (-2,-4,-1) = -8(0,1,4)$. Assim, $\vec{v} \perp (0,1,4)$.

Como $Q = (4,1,7)$ está no plano tangente à S em $P = (1,-1,5)$, $\vec{v} \perp \overrightarrow{PQ}$. Logo $\vec{v} \perp (3,2,2)$. Logo $\vec{v} \,//\, (0,1,4) \wedge (3,2,2) \Rightarrow$

Calculando o ~~produto~~ vetorial obtemos que $\vec{v} \,//\, (-10,12,3)$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,5) > 0$, temos que $\vec{v}$ tem a direção e o sentido do vetor $(10,-12,3)$.