4. Seja

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x^2 + 3y^2 \text{ e } z = (x-1)^2 + (y-2)^2\}.$$

(a) **(1,0)** Encontre uma parametrização para C, isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função derivável $\Gamma : I \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é C.

(b) **(1,5)** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,5) > 0$. Suponha que C esteja contida em uma superfície de nível de f e que o plano tangente a essa superfície no ponto $(-1,1,5)$ passe pelo ponto $(1,4,7)$. Determine a direção e sentido de crescimento máximo de f em $(-1,1,5)$.

(a) $\begin{cases} z = 2x^2+3y^2 \\ z = (x-1)^2+(y-2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x^2+3y^2 \\ 2x^2+3y^2 = (x-1)^2+(y-2)^2 \end{cases}$

$2x^2+3y^2 = x^2-2x+1+y^2-4y+4$

$\iff x^2+2x+2y^2+4y = 5 \iff$

$(x+1)^2+2(y+1)^2 = 8$. Assim, $\forall (x,y)$, existe $t \in [0,2\pi]$ tal que $\frac{x+1}{2\sqrt{2}} = \cos t$ e $\frac{y+1}{2} = \operatorname{sen} t$.

Logo $\Gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\Gamma(t) = \left(-1+2\sqrt{2}\cos t,\ -1+2\operatorname{sen} t,\ 2(-1+2\sqrt{2}\cos t)^2+3(-1+2\operatorname{sen} t)^2\right)$

é uma parametrização de C.

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = k\}$ $(k = f(-1,1,5))$

Suponha que $\nabla f(-1,1,5) = \vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$ pois $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,5) > 0$).

Seja $P = (-1,1,5)$ e $Q = (1,4,7)$. Como Q pertence ao plano tangente à S em $(-1,1,5)$, temos que $\vec{v} \perp \vec{PQ}$.

Logo $\vec{v} \perp (2,3,2)$.

Já que a curva $C \subset S$, a reta tangente à C em $(-1,1,5)$ está contida no plano tangente à S em $(-1,1,5)$.

Usando a parametrização obtida em (a) temos que $\Gamma(\pi/2) = (-1,1,5)$. Logo $\Gamma'(\pi/2)$ é também paralelo ao plano tangente à S.

$\Gamma'(t) = (-2\sqrt{2}\operatorname{sen} t,\ 2\cos t,\ 4(1+2\sqrt{2}\cos t)\cdot(-2\sqrt{2}\operatorname{sen} t)+6(-1+2\operatorname{sen} t)2\cos t)$

$\Gamma'(\pi/2) = (-2\sqrt{2}, 0, -8\sqrt{2})$. Assim $\vec{v} \parallel (2,3,2) \wedge (-1,0,4)$.

Calculando o produto vetorial, obtemos $\vec{v} \parallel (-12,10,-3)$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,5) > 0$, temos que $\vec{v}$ tem a direção e sentido do vetor $(12,-10,3)$.