B

3. Seja $f(x,y,z) = xy + z$.

(a) **(1,5)** Determine os pontos de máximo e de mínimo de f no elipsoide de equação
$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4.$$

(b) **(1,0)** Seja C a curva dada pela intersecção do elipsoide do item (a) (que tem equação $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$) com o plano de equação $x + y = 1$ Determine os pontos de máximo e de mínimo de f em C.

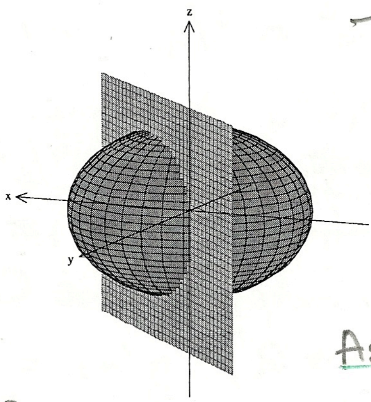
(c) **(0,5)** Seja
$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad x + y \geq 1\}.$$

Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em R. JUSTIFIQUE!

(a) É claro que $f(x,y,z) = xy + z$ é contínua e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+2z^2 = 4\}$ é um compacto. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em S.

Se $g(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2$, então g é de classe C^1 e $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 4z) \neq \vec{0}$ $\forall (x,y,z) \in S$.

Como f é diferenciável, podemos então usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Assim, os pontos de máximo e mínimo de f em S → continua



→ estão entre os pontos $(x,y,z) \in S$ que satisfazem: $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ com $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$.

Assim, temos o sistema

$$\begin{cases} y = 2\lambda x & (1) \\ x = 2\lambda y & (2) \\ 1 = 4\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 & (4) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema: ①

De (1) e (2)

$y = 2\lambda x = 2\lambda(2\lambda y) = 4\lambda^2 y$

$y(1 - 4\lambda^2) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $1 = 4\lambda^2$

Caso $y = 0$ $\Rightarrow x = 0$

Como $x^2+y^2+2z^2 = 4$, temos que $z = \pm\sqrt{2}$.

Temos os pontos $(0, 0, \pm\sqrt{2})$.

② Caso $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$

$\lambda = 1/2$ De (3) $z = 1/2$ e de (1) (ou (2)), $y = x$.

Usando (4) temos

$2x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 4 \Rightarrow$

$2x^2 = 4 - \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 7/4$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{7}/2$

Pontos: $(\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2, 1/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, -\sqrt{7}/2, 1/2)$

③ $\lambda = -1/2 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = -y$. Usando (4)

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{7}/2$. Daí, temos os pontos

$(\sqrt{7}/2, -\sqrt{7}/2, -1/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2, -1/2)$

Analisando:

Candidato (x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$	
$(0, 0, \pm\sqrt{2})$	$\pm\sqrt{2}$	
$(\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2, 1/2)$, $(-\sqrt{7}/2, -\sqrt{7}/2, +1/2)$	$\frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$	MÁXIMO
$(\sqrt{7}/2, -\sqrt{7}/2, -1/2)$, $(-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2, -1/2)$	$-9/4$	MÍNIMO

(b) Uma solução - parametrizando a curva

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+2z^2 = 4 \ \text{ e } \ x+y=1\}$$

(para uma solução usando Lagrange, veja a prova A)

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+2z^2=4 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x^2+(1-x)^2+2z^2=4 \\ y = 1-x \end{array}\right.$$

$$x^2+1+x^2-2x+2z^2 = 4 \iff z^2 + x^2 - x + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\iff (x-\tfrac{1}{2})^2 + z^2 = 7/4 \iff \left(\frac{x-1/2}{\sqrt{7}/2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{7}/2}\right)^2 = 1$$

Assim, $\exists\, t \in [0, 2\pi]$ tais que

$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\cos t$ e $z = \sqrt{7}/2 \,\text{sen}\, t$ e daí $y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\cos t$.

Assim $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\cos t, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{7}}{2}\,\text{sen}\, t\right)$

é uma parametrização de C.

Seja $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(\gamma(t))$.

Então $g(t) = \frac{1}{4} - \frac{7}{4}\cos^2 t + \frac{\sqrt{7}}{2}\,\text{sen}\, t$.

Nosso problema é então encontrar o máximo e o mínimo de g em $[0, 2\pi]$.

Candidatos: $t = 0$ e $t = 2\pi$ e os ptos críticos de g em $]0, 2\pi[$

$t = 0$ e $t = 2\pi$ / $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$

ptos críticos de g em $]0, 2\pi[$:

$$g'(t) = \frac{7}{2}\cos t\,\text{sen}\, t + \frac{\sqrt{7}}{2}\cos t = \frac{1}{2}\cos t\,(7\,\text{sen}\, t + \sqrt{7})$$

Logo $g'(t) = 0 \Rightarrow \cos t = 0$ ou $\text{sen}\, t = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

$\cos t = 0 \Rightarrow t = \pi/2$ ou $t = 3\pi/2$, de onde obtemos os pontos $(1/2, \frac{1}{2}, \sqrt{7}/2)$ e $(1/2, 1/2, -\sqrt{7}/2)$.

Se $\text{sen}\, t = -1/\sqrt{7}$, então $\cos t = \pm\sqrt{6}/\sqrt{7}$, donde obtemos os pontos $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Candidato (x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$	
$(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}, 0)$	$-3/2$	
$(\frac{1}{2}, 1/2, \sqrt{7}/2)$	$1/4 + \sqrt{7}/2$	MÁXIMO
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{7}/2)$	$1/4 - \sqrt{7}/2$	
$(1/2+\sqrt{6}/2, 1/2-\sqrt{6}/2, -\frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{4} - \frac{6}{4} - \frac{1}{2} = -7/4$	MÍNIMO

(c) Observe que $\nabla f(x,y,z) = (y,x,1) \neq \vec{0}$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Logo f NÃO tem pontos críticos. Em particular, não tem pontos críticos no interior de R.

Os ponto $(1/2, 1/2, \sqrt{7}/2) \in R$ e os pontos $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in R$ (pontos encontrados em (b)) são candidatos a pontos de máximo e de mínimo de f em R.

Dos pontos obtidos em (a) apenas $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ satisfaz $x+y \geq 1$. Assim, como $R \subset S$ e ele é ponto de máximo de f em S, ele será o ponto de máximo de f em R.

Se $h(x,y,z) = x+y$ então $\nabla f(x,y,z) = (y,x,1)$ NUNCA será $\parallel$ ao $\nabla h(x,y,z) = (1,1,0)$.

Logo, não há candidato a ponto de mínimo de f em R satisfazendo $x+y=1$. Assim o mínimo de f em R é atingido nos pontos $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.