3. Seja $f(x,y,z) = xz + y$.

(a) **(1,5)** Determine os pontos de máximo e de mínimo de f no elipsoide de equação

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4.$$

(b) **(1,0)** Seja C a curva dada pela intersecção do elipsoide do item (a) (que tem equação $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$) com o plano de equação $x + z = 1$. Determine os pontos de máximo e de mínimo de f em C.

(c) **(0,5)** Seja

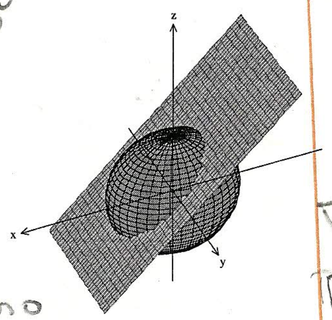
$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad x + z \geq 1\}.$$

Encontre os pontos de máximo e de mínimo de f em R. JUSTIFIQUE!

(a) Seja $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$ e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y,z) = 4\}$

$\nabla g(x,y,z) = (2x, 4y, 2z) \neq \vec{0}$ $\forall (x,y,z) \in S$.

Como a função f é contínua e S é um conjunto compacto, temos que f tem máximo e mínimo em S. Vamos usar o método dos Multiplicadores de Lagrange para determiná-los. $\rightarrow$ (*)



$\rightarrow$ (*) Eles estão entre os pontos $(x,y,z) \in S$ que satisfazem: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ com $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$. Então, queremos $(x,y,z) \in S$ com $\nabla f(x,y,z) \wedge \nabla g(x,y,z) = \vec{0}$ $\rightarrow$ (**)

(**) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z & 1 & x \\ x & 2y & z \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} z - 2xy = 0 & (1) \\ z^2 - x^2 = 0 & (2) \\ 2yz - x = 0 & (3) \end{cases}$

De (2) temos que $z = \pm x$.

$\boxed{\text{Caso } z = x}$ Em (1) (ou (3)) $\Rightarrow x(1-2y) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 1/2$

$x = 0 \Rightarrow z = 0$ e como $(x,y,z) \in S$, $y = \pm\sqrt{2}$. Temos os pontos $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$.

Se $y = 1/2$ temos $x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}/2$. Daí obtemos os pontos $(\sqrt{7}/2, 1/2, \sqrt{7}/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, 1/2, -\sqrt{7}/2)$.

Caso $z = -x$ Em (1) (ou (3)) $\Rightarrow x(1+2y) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = -1/2$.

$x = 0$, é como antes. Se $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}/2$. Como $x = -z$, temos os pontos $(\sqrt{7}/2, -1/2, -\sqrt{7}/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, -1/2, \sqrt{7}/2)$.

Candidato (x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$	Conclusão
$(0, \pm\sqrt{2}, 0)$	$\pm\sqrt{2}$	
$(\sqrt{7}/2, 1/2, \sqrt{7}/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, 1/2, -\sqrt{7}/2)$	$7/4 + 2/4 = 9/4$	MÁXIMO
$(\sqrt{7}/2, -1/2, -\sqrt{7}/2)$ e $(-\sqrt{7}/2, -1/2, \sqrt{7}/2)$	$-9/4$	MÍNIMO

(b) Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+2y^2+z^2 = 4$ e $x+z = 1\}$

Sejam $g(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2$ e $h(x,y,z) = x+z$.

Temos que g e h são de classe C^1 e

$$\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = (4y, 2(x-z), 4y) \neq \vec{0}$$

Se $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = \vec{0} \Rightarrow y = 0$ e $x = z$.

$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = z = 1/2$. Mas $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 4$!!

$x+z=1$

Assim podemos usar o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Os pontos de máximo e mínimo de f em C estão entre os pontos $(x,y,z) \in C$ que satisfazem

$\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ com $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$

$$\Rightarrow [\nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)] = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ z & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2xy - z + x - 2yz = 0 \Rightarrow$$

$$(x-z) + 2y(x-z) = 0 \Rightarrow (1+2y)(x-z) = 0.$$

Logo $(x,y,z) \in C$ e $1+2y = 0$ ou $x = z$.

Caso $\boxed{y = -1/2}$

$$x + z = 1 \Rightarrow z = 1-x$$

$$x^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (1-x)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x + \frac{3}{2} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+20}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}.$$ Temos então os pontos:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Caso $\boxed{x = z}$

$$2x = 1 \Rightarrow x = 1/2 = z$$

$$(1/2)^2 + 2y^2 + (1/2)^2 = 4 \Rightarrow 2y^2 = 4 - 1/2 \Rightarrow$$

$$y^2 = 7/4 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$ Daí temos os pontos:

$$(1/2, \sqrt{7}/2, 1/2) \text{ e } (1/2, -\sqrt{7}/2, 1/2)$$

Analisando

(x_0, y_0, z_0)	$f(x_0, y_0, z_0)$	
$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\frac{1}{4} - \frac{6}{4} - \frac{1}{2} = -7/4$	MÍNIMO
$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$		
$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{7}/2, 1/2\right)$	$1/4 + \sqrt{7}/2$	MÁXIMO
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}, 1/2\right)$	$1/4 - \sqrt{7}/2$	

(c) Observe que

$$\nabla f(x,y,z) = (z,1,x) \neq \vec{0} \quad \forall (x,y,z).$$

Assim, f NÃO tem pontos críticos, em particular, não tem pontos críticos no interior de R.

Também, $\nabla h(x,y,z) = (1,0,1)$

Logo, $\nabla f(x,y,z) = (z,1,x)$, nunca será paralelo ao $\nabla h(x,y,z)$. Logo não há candidatos a pontos de máximo ou mínimo de f em R que estejam no plano $x+z=1$.

Assim os candidatos são os pontos do item (b)

do item (a), o único ponto que satisfaz a condição $x+z \geq 1$ é $\left(\sqrt{7}/2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Assim: $\left(\sqrt{7}/2, \frac{1}{2}, \sqrt{7}/2\right)$ é ponto de máximo de f em R

e os pontos $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

são pontos de mínimo.