B

2. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Seja

$$g(u,v) = uf(2u-v, 2uv) + \frac{\partial f}{\partial y}(2u-v, 2uv).$$

(a) **(1,5)** Encontre $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de primeira e de segunda ordem de f.

(b) **(1,0)** Sabendo que $10x - 3y - 25z = -6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,f(1,2))$ e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = -\frac{3}{25} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = \frac{4}{125},$$

calcule $\frac{\partial g}{\partial u}(1,1)$.

(a) Seja $x = x(u,v) = 2u - v$ e $y = y(u,v) = 2uv$. Então $\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) = 2$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) = -1$, $\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) = 2v$ e $\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) = 2u$.

Assim, como f é de classe C^2, as derivadas de ordem 2 de f são contínuas e assim $\frac{\partial f}{\partial x}$ é diferenciável. Também, f é de classe C^2, portanto, de classe C^1 e então f é diferenciável. Logo vale a Regra da Cadeia.

Assim:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(x,y) + u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, 2v\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot 2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, 2v.$$ Portanto:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(2u-v, 2uv) + 2u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(2u-v, 2uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(2u-v, 2uv)\right] + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2u-v, 2uv) + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u-v, 2uv).}$$

$$\boxed{\text{Analogamente, } \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = u\left[\frac{\partial f}{\partial x}(2u-v, 2uv)(-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(2u-v, 2uv)\cdot 2u\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2u-v, 2uv)(-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u-v, 2uv)\cdot 2u}$$

Sendo $10x - 3y - 25z = -6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(1, 2, f(1,2))$ temos que:

$$10 - 6 - 25 f(1,2) = -6 .$$

Logo $\boxed{f(1,2) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}}$

Também temos que $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(10, -3, -25) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2), -1 \right)$$

Logo $\lambda = 25$ e

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{10}{25}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-3}{25}} .$$

Quando $(u,v) = (1,1)$ temos que $(x,y) = (1,2)$,

Logo $\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(1,1) = \frac{2}{5} + 1\left[\frac{10}{25} \cdot - \frac{3}{25}\right] + 2 \cdot \left(\frac{-3}{25}\right) + 2 \cdot \frac{4}{125}}$