MAT 2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

Prova Substitutiva -06/12/2010

A e B

Turma: ______________

Nome: ____

Nº USP: ____________________________________

Professor: ___________________________________

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Instruções:

1 - Preencha o cabeçalho a tinta.
2 - Justifique todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. Seja $f(x,y) = \cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

   (a) **(1,5)** Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ contínua? JUSTIFIQUE!

   (b) **(0,5)** Em que pontos de $\mathbb{R}^2$ é f diferenciável? JUSTIFIQUE!

(a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{3}x\,\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{2/3}}$, $\neq 0$

Em $(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{x^2}-1}{x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x^{2/3})\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}}{1}$ $\to 0$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{2}{3}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^{2/3})}{x^{2/3}}}_{\to 1}\cdot \underbrace{x^{1/3}}_{\to 0} = 0$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{2/3}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Se $(x,y) \neq (0,0)$, então $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em (x,y)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3}\frac{x\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{2}{3}\underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{\frac{x\cdot x^2}{x^2+y^2}}}_{\to 0}\ \text{limitada} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Assim $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Como $f(x,y) = f(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ também é contínua em $\mathbb{R}^2$. Logo f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e portanto DIFERENCIÁVEL em $\mathbb{R}^2$.