**Questão 4:** Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y-x)^2 + (z-x)^2 = 8 \text{ e } x+y+z = 2\}$. Sabendo que $C$ é um conjunto fechado e limitado, determine os pontos de $C$ que estão mais próximos de $(0,0,0)$ e os que estão mais distantes de (0,0,0).

`Solução`: Queremos achar os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ em $C$. Como $C$ é compacto e $f$ é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que esses pontos existem.

Definindo $g(x,y,z) = \frac{1}{2}[(y-x)^2 + (z-x)^2] - 4$ e $h(x,y,z) = x+y+z-2$, temos $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$. Estamos em condições de aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange, pois $f$ é diferenciável e $g$ e $h$ são de classe $C^1$. Os pontos de máximo ou de mínimo de $f$ em $C$ necessariamente serão pontos $(x,y,z)$ onde $\nabla f$, $\nabla g$ e $\nabla h$ são coplanares (isto inclui os pontos onde $\nabla g$ e $\nabla h$ são linearmente dependentes e os pontos onde eles são linearmente independentes e $\nabla f$ é combinação linear deles).

Temos $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g(x,y,z) = (2x-y-z, y-x, z-x)$, $\nabla h(x,y,z) = (1,1,1)$. Metade do produto misto $\nabla f \wedge \nabla g \cdot \nabla h$ calculado em $(x,y,z)$ é igual a:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x-y-z & y-x & z-x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x(y-x) - y(2x-y-z) - x(z-x) + z(2x-y-z) + y(z-x) - z(y-x) =$$

$$(y-x)(z-x) + (x-z)(y-x) + (z-y)(2x-y-z) = (z-y)(2x-y-z).$$

Concluímos então que $\nabla f$, $\nabla g$ e $\nabla h$ são coplanares se e somente se $z = y$ ou $2x - y - z = 0$.

Os pontos extremais de $f$ em $C$ serão portanto soluções de um dos dois sistemas seguintes:

$$\begin{cases} z = y & (1) \\ x+y+z = 2 & (2) \\ (y-x)^2 + (z-x)^2 = 8 & (3) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x-y-z = 0 & (4) \\ x+y+z = 2 & (2) \\ (y-x)^2 + (z-x)^2 = 8 & (3)\,. \end{cases}$$

Substituindo $z = y$ e $x = 2 - 2y$ em (3), vem $(3y-2)^2 = 4$ e, portanto, $y = 0$ ou $y = 4/3$. Obtemos assim as duas soluções do primeiro dos dois sistemas acima: $(2,0,0)$ e $(-2/3, 4/3, 4/3)$.

Somando (4) e (2), obtemos $x = 2/3$. Substituindo $x = 2/3$ em (2), vem $z = 4/3 - y$. Substituindo estas duas igualdades em (3), vem $(y-2/3)^2 = 4$ e, portanto, $y = 8/3$ ou $y = -4/3$. Obtemos assim as duas soluções do segundo dos dois sistemas acima: $(2/3, 8/3, -4/3)$ e $(2/3, -4/3, 8/3)$.

Para descobrir quais são os pontos de máximo e os pontos de mínimo, basta calcular o valor de $f$ nos quatro candidatos encontrados:

$$f(2/3, -4/3, 8/3) = \frac{84}{9},\ f(2/3, 8/3, -4/3) = \frac{84}{9},\ f(2,0,0) = 4,\ f(-2/3, 4/3, 4/3) = 4.$$

Concluímos então que $(2,0,0)$ e $(-2/3, 4/3, 4/3)$ são pontos de mínimo de $f$ e que $(2/3, -4/3, 8/3)$ e $(2/3, 8/3, -4/3)$ são pontos de máximo em $C$. Assim, os pontos de $C$ mais próximos da origem são $(2,0,0)$ e $(-2/3, 4/3, 4/3)$ e ficam à distância 2 da origem. Os pontos mais distantes são $(2/3, -4/3, 8/3)$ e $(2/3, 8/3, -4/3)$ e ficam à distância $\sqrt{84}/3$.