Questão 4: Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-z)^2 + (y-z)^2 = 8 \text{ e } x+y+z = 2\}$. Sabendo que C é um conjunto fechado e limitado, determine os pontos de C que estão mais próximos de $(0,0,0)$ e os que estão mais distantes de (0,0,0).

`Solução`: Queremos achar os pontos de máximo e de mínimo da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ em C. Como C é compacto e f é contínua, segue do Teorema de Weierstrass que esses pontos existem.

Definindo $g(x,y,z) = \frac{1}{2}[(x-z)^2 + (y-z)^2] - 4$ e $h(x,y,z) = x+y+z-2$, temos $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$. Estamos em condições de aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange, pois f é diferenciável e g e h são de classe C^1. Temos $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g(x,y,z) = (x-z, y-z, 2z-x-y)$, $\nabla h(x,y,z) = (1,1,1)$ e $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = (x+2y-3z, -2x-y+3z, x-y)$. Se $\nabla g(x,y,z) \wedge \nabla h(x,y,z) = (0,0,0)$, então $x = y = z$ e portanto $(x,y,z) \notin C$. Isto é, ∇g e ∇h são linearmente independentes em todos os pontos de C. Segue então que, nos pontos de máximo ou de mínimo de f em C, ∇f é combinação linear de ∇g e ∇h. Assim, os pontos de máximo ou de mínimo de f em C necessariamente serão pontos (x,y,z) para os quais existem λ e μ tais que $\frac{1}{2}\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z)$. Queremos portanto resolver o sistema

$$\begin{cases} x = \lambda(x-z) + \mu & (1) \\ y = \lambda(y-z) + \mu & (2) \\ z = \lambda(2z-x-y) + \mu & (3) \\ x+y+z = 2 & (4) \\ (z-x)^2 + (z-y)^2 = 8 & (5). \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1) e (3) de (2), vem

$$\begin{cases} x - y = \lambda(x-y) & (6) \\ y - z = \lambda(x+2y-3z) & (7). \end{cases}$$

A equação (6) implica que $\lambda = 1$ ou que $x = y$.

Se $\lambda = 1$, segue de (7) que $x + y - 2z = 0$. Subtraindo esta equação de (4), vem que $z = 2/3$. Daí segue de (4) que $y = 4/3 - x$. Substituindo estas igualdades em (5), vem que $2(x - 2/3)^2 = 8$, logo $x = 8/3$ ou $x = -4/3$. Obtemos assim dois candidatos a pontos extremais: $(8/3, -4/3, 2/3)$ e $(-4/3, 8/3, 2/3)$.

Se $x = y$, segue de (4) e (5) que $(z-x)^2 = 4$ e $z = 2 - 2x$. Logo, $(2-3x)^2 = 4$ e, portanto, $x = 0$ ou $x = 4/3$. Obtemos assim mais dois candidatos a pontos extremais: $(0,0,2)$ e $(4/3, 4/3, -2/3)$.

Para descobrir quais são os pontos de máximo e os pontos de mínimo, basta calcular o valor de f nos quatro candidatos encontrados:

$$f(8/3, -4/3, 2/3) = \frac{84}{9}, \; f(-4/3, 8/3, 2/3) = \frac{84}{9}, \; f(0,0,2) = 4, \; f(4/3, 4/3, -2/3) = 4.$$

Concluímos então que $(0,0,2)$ e $(4/3, 4/3, -2/3)$ são pontos de mínimo de f em C e que $(8/3, -4/3, 2/3)$ e $(-4/3, 8/3, 2/3)$ são pontos de máximo. Assim, os pontos de C mais próximos da origem são $(0,0,2)$ e $(4/3, 4/3, -2/3)$ e ficam à distância 2 da origem. Os pontos mais distantes são $(8/3, -4/3, 2/3)$ e $(-4/3, 8/3, 2/3)$ e ficam à distância $\sqrt{84}/3$.