Questão 3: (2,5 pontos) Justifique a existência e determine os pontos de máximo e mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - xy + 3z$ em $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$.

R é limitado pois é uma esfera; R é fechado pois a fronteira de R é $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 25\}$, que está contido em R. Pelo Teorema de Weierstrass, a função contínua f assume máximo e mínimo em R. Como $\nabla f(x,y,z) = (2x-y, 2y-x, 3) \neq (0,0,0)$, f não assume máximo nem mínimo no interior de R. Assim, os pontos de máximo e de mínimo de f em R estão na fronteira de R, que é uma superfície de nível da função $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Como f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, se (x,y,z) é um desses pontos, usando o método de Lagrange, temos que $\nabla f(x,y,z)$ é paralelo a $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y,$ Como (x,y,z) está na fronteira de R, temos $x^2+y^2+z^2 = 2$ e portanto os pontos de máximo e mínimo de f em R verificam a

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-y & 2y-x & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0} \\ \\ x^2+y^2+z^2 = 25 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} 2yz - xz - 3y = 0 & (1) \\ 2xz - yz - 3x = 0 & (2) \\ 2xy - y^2 - 2yx + x^2 = x^2 - y^2 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 & (4) \end{cases}$$

Por (3), temos que $x = y$ ou $x = -y$

1º caso: $x = y$

$(2) \Rightarrow xz - 3x = x(z-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $z = 3$

Se $x=0$ (e portanto $y=0$) temos, por (4), que $z=5$ ou $z=-5$

Se $z=3$, como $x=y$, temos, por (4), que $x=2\sqrt{2}$ ou $x=-2\sqrt{2}$

No 1º caso, os pontos são $P_1=(0,0,5)$ e $P_2=(0,0,-5)$ se $x=0$

$P_3=(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3)$ e $P_4=(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 3)$ se $z=3$

2º caso: $x=-y$

$(2) \Rightarrow 3xz-3x = 3x(z-1)=0 \Rightarrow x=0$ ou $z=1$

O caso $x=0=-y$ já foi estudado no 1º caso

Se $z=1$, como $x=-y$, temos, por (4) que $x=2\sqrt{3}$ ou $x=-2\sqrt{3}$

No 2º caso, os pontos são $P_5=(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1)$ e $P_6=(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 1)$

$f(P_1)=15$, $f(P_2)=-15$

$f(P_3)=f(P_4)= 8+8-8+9=17$

$f(P_5)=f(P_6)=12+12+12+3=39$

Resposta: $P_2=(0,0,-5)$ é o ponto de mínimo

$P_5=(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1)$ e $P_6=(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 1)$ são os pontos de máximo