Questão 3: Justifique a existência e determine os pontos de máximo e mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + z^2 - xz + 3y$ em $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$

R é limitado pois é uma esfera; R é fechado pois a fronteira de R é $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=25\}$ que está contido em R. Pelo Teorema de Weierstrass, a função contínua f assume máximo e mínimo em R. Esses valores não são assumidos em pontos do interior de R, pois $\nabla f(x,y,z) = (2x-z, 3, 2z-x)$ que é diferente do vetor nulo em todos os pontos (x,y,z). Assim, os pontos de máximo e de mínimo de f em R estão na fronteira de R, que é uma superfície de nível da função $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. As funções f e g são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ é não nulo se $x^2+y^2+z^2 = 25$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos que se (x,y,z) é um dos pontos de máximo ou de mínimo que queremos encontrar, então existe λ real tal que

$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ e (x,y,z) está na fronteira de R. Portanto:

$$\begin{cases} 2x - z = 2\lambda x & (1) \\ 3 = 2\lambda y & (2) \\ 2z - x = 2\lambda z & (3) \\ x^2+y^2+z^2 = 25 & (4) \end{cases}$$

De (1) e (3) decorre que $2x - z - 2z + x = 2\lambda x - 2\lambda z$ e portanto $3(x-z) = 2\lambda(x-z)$. Logo $x = z$ ou $\lambda = 3/2$

1º caso: $\lambda = \frac{3}{2}$

$(2) \Rightarrow y = 1$

$(1) \Rightarrow 2x - z = 3x \Rightarrow x = -z$ e, com isso,

$(4) \Rightarrow 2x^2 + 1 = 25 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ ou $x = -2\sqrt{3}$

No 1º caso, os pontos são $P_1 = (2\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{3})$, $P_2 = (-2\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$

2º caso: $x = z$

$(1) \Rightarrow x = 2\lambda x \Rightarrow x = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$

Se $x = 0$ (e portanto $z = 0$), decorre de (4) que $y = 5$ ou $y = -5$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, decorre de (2) que $y = 3$ e, como $x = z$,

temos, por (4) que $x = 2\sqrt{2}$ ou $x = -2\sqrt{2}$

No 2º caso, os pontos são: $P_3 = (0, 5, 0)$, $P_4 = (0, -5, 0)$,

$P_5 = (2\sqrt{2}, 3, 2\sqrt{2})$, $P_6 = (-2\sqrt{2}, 3, -2\sqrt{2})$

$f(P_5) = 8 + 8 - 8 + 9 = 17 = f(P_6)$

$f(P_3) = 15$ $\qquad$ $f(P_4) = -15$

$f(P_1) = 12 + 12 + 12 + 3 = 39 = f(P_2)$

$\therefore$ P_4 é ponto de mínimo e os pontos P_1 e P_2 são pontos de máximo